Liban mai 2018

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes 1 + i et 1− i.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$.

a. Déterminer la forme trigonométrique de S_n.

b. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

CORRECTION

1. $|1 + \mathrm{i}| = |1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1 – i est le conjugué de 1 + i donc $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}$.

2. *a.* Pour tout entier naturel n, $(1 + \mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$ et $(1 - \mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-n\pi}{4}}$

$S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-n\pi}{4}}\right)$ donc $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}$ donc S_n est un réel.

Cas 1 : Si $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \le \frac{n\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors $2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} > 0$ donc $|S_n| = 2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}$ et $\arg S_n = 0$ à 2π près.

soit en multipliant par 4 : $-2\pi + 8k\pi \le n\pi \le 2\pi + 8k\pi$ donc en divisant par π : $-2 + 8k \le n \le 2 + 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$$

Cas 2 : Si $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \frac{n\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ alors $2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} < 0$ donc $|S_n| = -2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}$ et $\arg S_n = \pi$ à 2π près.

soit en multipliant par 4 : $2\pi + 8k\pi \le n\pi \le 6\pi + 8k\pi$ donc en divisant par π : $2 + 8k \le n \le 6 + 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$S_n = -2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$$

b. **Affirmation a** : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel. VRAI

$S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}$ donc S_n est un réel

Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$. VRAI

Si $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $n = 2 + 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $S_n = 0$