Asie juin 2008

A – Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

• $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2.

• L'écriture $P_1 \cap P_2 = \varnothing$; signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \text{ ; et } P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$$

alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient : $P_1 \cap P_3 \neq \varnothing$.

2. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing \text{ ;}$$

alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que :

$$P_1 \cap P_2 = \varnothing \text{ ; et } P_2 \cap P_3 = \varnothing.$$

3. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \text{ ; et } P_1 \cap P_3 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient : $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$.

4. Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap D \neq \varnothing \text{ ; et } P_1 \cap P_2 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

• P_1 d'équation $x + y - z = 0$

• P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,

• P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

CORRECTION

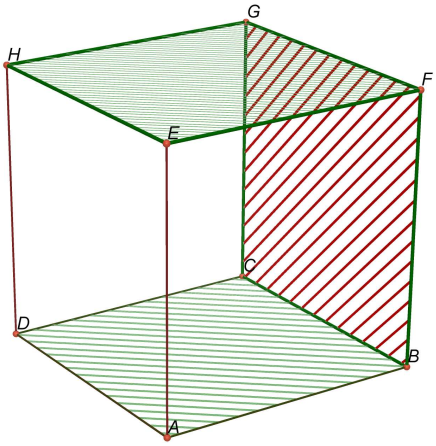
1. **FAUX :**

Dans le cube ABCDEFGH, Soit P_1 le plan (ABC), P_2 le plan (BCF), P_3 le plan (EFG),

les plans (ABC), (BCF) ont une intersection non vide : (BC) donc $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$;

les plans (EFG), (BCF) ont une intersection non vide : (GF) donc $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$

et les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles donc ont une intersection vide donc $P_1 \cap P_3 = \varnothing$.



2. **FAUX**

Avec les notations précédentes, les plans P_1 et P_3 sont strictement parallèles donc $P_1 \cap P_3 = \varnothing$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing$; or $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$.

3. **Faux**

$P_1 \cap P_3 = \varnothing$, alors les plans P_1 et P_3 sont strictement parallèles $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$ donc soit $P_1 \cap P_2$ est une droite, soit c'est un plan.

Si $P_1 \cap P_2$ est un plan $P_1 = P_2$ donc $P_2 \cap P_3 = \varnothing$.

4. **Faux**

Si $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, alors les plans P_1 et P_2 sont strictement parallèles

$P_1 \cap D \neq \varnothing$, l'intersection non vide d'une droite et d'un plan est soit un point soit une droite

Si $P_1 \cap D$ est une droite, alors D est contenue dans P_1

or $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, donc en particulier $P_2 \cap D = \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

1. P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ (1 ; 1 ; – 1) P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ (2 ; 1 ; 1)

ces deux vecteurs sont non colinéaires donc les plans P_1 et P_2 sont sécants

Soit A le point d'abscisse 0 appartenant à $P_1 \cap P_2$ alors son ordonnée y_A et sa cote z_A vérifient :

$\begin{cases} x_A + y_A - z_A = 0 \\ 2x_A + y_A + z_A = 3 \end{cases}$ donc par addition terme à terme $2y_A = 3$ donc $y_A = z_A = \dfrac{3}{2}$

A a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$

Soit B le point d'ordonnée 0 appartenant à $P_1 \cap P_2$ alors son abscisse x_B et sa cote z_B vérifient :

$\begin{cases} x_B + y_B - z_B = 0 \\ 2\,x_B + y_B + z_B = 3 \end{cases}$ donc par addition terme à terme $3\,x_B = 3$ donc $x_B = z_B = 1$

B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(1\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ donc le vecteur $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ

$\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; – 3 ; – 1)

Un point M appartient à Δ si et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2\,k \\ y = -3\,k \\ z - 1 = -k \end{cases}$

donc une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 1 + 2\,k \\ y = -3\,k \\ z = 1 - k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. L'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est l'intersection de Δ et de P_3 donc est telle que $\begin{cases} x = 1 + 2\,k \\ y = -3\,k \\ z = 1 - k \end{cases}$ et $x + 2\,y - 4\,z + 3 = 0$.

en remplaçant : $1 + 2\,k - 6\,k - 4\,(1 - k) + 3 = 0$ soit $0 = 0$

Tout point de Δ appartient à P_3 donc $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \Delta$