EXERCICE I

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 2]$ par $f(x) = \sqrt{4-2x}$

1. Variations de f :

a) Écrire f comme composée de deux fonctions usuelles que l'on explicitera.

b) En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty : 2]$.

2. Dérivabilité de f :

a) Déterminer $f(x)$ pour tout x de $]-\infty\ ;\ 2[$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

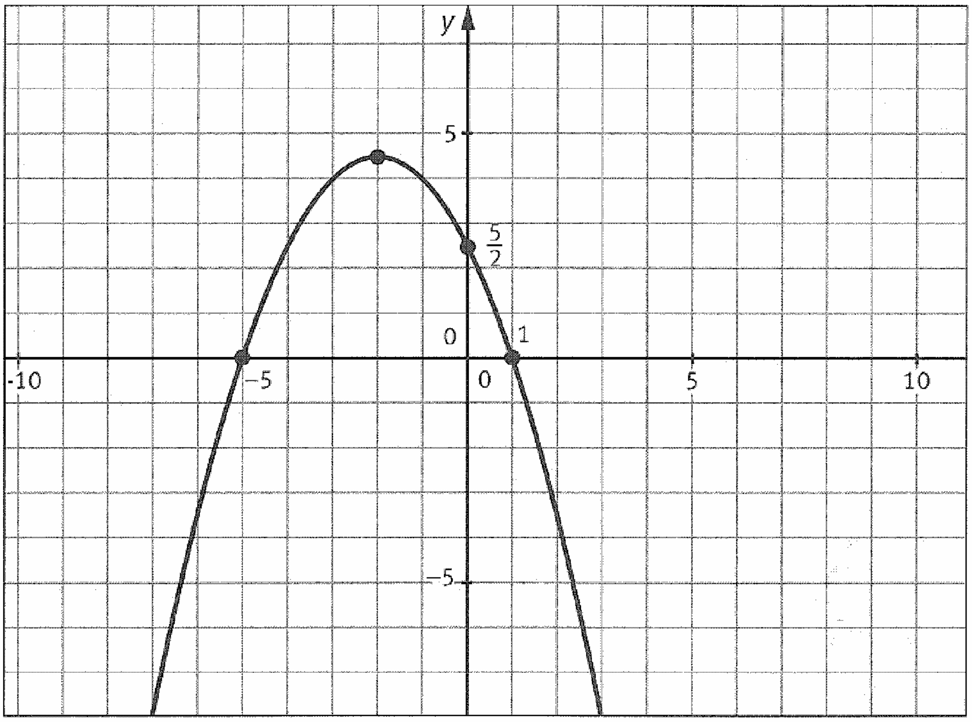
3. Approximation affine:

a) Déterminer l'approximation affine de f au voisinage de 0.

b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3{,}998}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ (a, b, c réels) dont la courbe représentative figure ci-après.



Les points marqués sont des points de la courbe de f . En utilisant uniquement ces données, répondre aux questions (justifier)

Déterminer le signe de a.

Déterminer le signe du discriminant Δ du trinôme $f(x)$.

Retrouver l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 3

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 1 cm).

1. *a*. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Étudier le comportement asymptotique de f en 3. Interpréter les résultats graphiquement.

2. *a*. Déterminer la dérivée de f et étudier les variations de f .

b. Dresser le tableau de variation complet de f .

3. *a*. Montrer que la courbe de f admet la droite Δ d'équation $y = -2x - 3$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$..

b. Déterminer algébriquement la position relative de Δ et de $\mathscr{C}$.

4. Soit I(3 ; – 9). Montrer que I est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

6. Construire $\mathscr{C}$, y faire apparaître les éléments remarquables.

CORRECTION

EXERCICE 1

1. *a*. Soit $u(x) = 4 - 2x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $x \xrightarrow{u} 4 - 2x \xrightarrow{v} \sqrt{4-2x}$ donc $f = v \circ u$

1. *b*. La fonction u est une fonction affine (de la forme $u(x) = ax + b$ avec $a < 0$) donc est décroissante sur $]-\infty ; 2]$

Sur $]-\infty ; 2]$, $x \leq 2$ donc $2x \leq 4$ donc $4 - 2x \geq 0$ or sur $[0 ; +\infty[$, la fonction v est croissante

La composée d'une fonction croissante v et d'une fonction décroissante u est une fonction décroissante donc f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$

2. *a*. La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, ici $u(x) = 4 - 2x$ donc $u'(x) = -2$ et $f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{4-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}}$.

2. *b*. f est définie sur $]-\infty ; 2]$ donc pour étudier la dérivabilité de f en 2, il faut déterminer la limite quant h tend vers 0^- de $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{4-2(2+h)}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}}{h} = \frac{\sqrt{-2h}\times\sqrt{-2h}}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2h}{h\sqrt{-2h}} = \frac{-2}{\sqrt{-2h}}$$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -2h = 0^+$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sqrt{-2h} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{1}{\sqrt{-2h}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{-2}{\sqrt{-2h}} = -\infty$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 2, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$ donc la courbe de f admet au point d'abscisse 2 une tangente verticale.

3. *a*. une approximation affine de f au voisinage de 0 est $f(0) + x f'(0)$

$f(0) = \sqrt{4-2\times 0} = 2$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{4-2\times 0}} = -\dfrac{1}{2}$ une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$

3. *b*. $3{,}998 = 4 - 2 \times 0{,}001$ donc $3{,}998 = f(0{,}001)$ or une approximation affine de f au voisinage de 0 est $2 - \dfrac{1}{2}x$ donc $f(0{,}001)$ est approximativement égal à $2 - \dfrac{1}{2} \times 0{,}001$ soit à 1,9995

Une valeur approchée de $\sqrt{3{,}998}$ est 1,9995

EXERCICE 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ donc sa courbe représentative est une parabole, la parabole est dirigée vers les $y \leq 0$ donc $a < 0$

Graphiquement $f(-5) = 0$ et $f(1) = 0$ donc $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes donc $\Delta > 0$.

Graphiquement $f(-5) = 0$ et $f(1) = 0$; $f'(-2) = 0$ et $f(0) = \dfrac{5}{2}$

$f(-5) = 0 \Leftrightarrow 25a - 5b + c = 0$;

$f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$

$f'(x) = 2ax + b$ et $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow -4a + b = 0$

on a donc le système : $\begin{cases} 25a - 5b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ -4a + b = 0 \end{cases}$ en remplaçant b par $4a$ dans les deux premières lignes, le système devient :

$\begin{cases} 25a - 20a + c = 0 \\ a + 4a + c = 0 \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + c = 0 \\ 5a + c = 0 \\ b = 4a \end{cases}$ donc $c = -5a$, donc $f(x) = ax^2 + 4ax - 5a$

$f(0) = \dfrac{5}{2}$ or $f(0) = -5a = \dfrac{5}{2}$ donc $a = -\dfrac{1}{2}$ donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{5}{2}$.

EXERCICE 3

1. $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3} = \dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = x\,\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = -2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = -2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to3} x-3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to3} -2x^2+3x+7 = -2$, il faut donc déterminer le signe de $x-3$

si $x > 3$; $x-3 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} x-3 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$

si $x < 3$; $x-3 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x-3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe de f.

2. $u(x) = -2x^2+3x+7$ donc $u'(x) = -4x+3$
$v(x) = x-3$ donc $v'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{(-4x+3)(x-3)-(-2x^2+3x+7)}{(x-3)^2} = \dfrac{-4x^2+3x+12x-9+2x^2-3x-7}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2+12x-16}{(x-3)^2} = -2\,\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$

$x^2-6x+8 = 0$

$\Delta = 36-4\times8$ donc $x^2-6x+8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$ donc :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	–	‖	–	0	+	
signe de $f'(x)$		–		+	‖	+		–	
variation de f	$+\infty$ ↘		-5	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	

3. *a*. $f(x)-(-2x-3) = \dfrac{-2x^2+3x+7}{x-3}+2x+3 = \dfrac{-2x^2+3x+7+(x-3)(2x+3)}{x-3}$

$f(x)-(-2x-3) = \dfrac{-2x^2+3x+7+2x^2-6x+3x-9}{x-3} = \dfrac{-2}{x-3}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x-3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x-3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(-2x-3) = 0$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x-3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(-2x-3) = 0$

La droite d'équation $y = -2x-3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. *b*. Pour connaître la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$, il suffit d'étudier le signe de $f(x)-(-2x-3)$ donc de $\dfrac{-2}{x-3}$

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$x-3$	–	+
signe de $f'(x)$	+	–
Position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$	$\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$	$\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$

4. Pour montrer que S est centre de symétrie de C, il suffit de prouver que pour tout h non nul, $f(3-h)+f(3+h) = -18$

D’après la question précédente $f(x) = -2x - 3 - \dfrac{2}{x-3}$

$f(3-h) = -2(3-h) - 3 - \dfrac{2}{3-h-3} = -9 + 2h + \dfrac{2}{h}$

$f(3+h) = -2(3+h) - 3 - \dfrac{2}{3+h-3} = -9 - 2h - \dfrac{2}{h}$

$f(3+h) + f(3-h) = -9 + 2h + \dfrac{2}{h} - 9 - 2h - \dfrac{2}{h} = -18$ donc le point S de coordonnées (3 ; – 9) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

5. Pour déterminer les points d’intersection de $\mathscr{C}$ avec l’axe des abscisses, il suffit de résoudre $f(x) = 0$

soit $\dfrac{-2x^2 + 3x + 7}{x-3} = 0$ ou encore $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ avec $x \neq 3$

$\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times 7 = 65$ donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{65}}{-4}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{65}}{-4}$

Il existe deux points d’intersection de $\mathscr{C}$ avec l’axe des abscisses, l’un A de coordonnées $\left(\dfrac{3+\sqrt{65}}{4} ; 0\right)$ l’autre B de coordonnées $\left(\dfrac{3-\sqrt{65}}{4} ; 0\right)$