Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm
Soit A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2\,i$ et A_1 le milieu de $[A_0A'_0]$
De la même façon, si A_n a pour affixe z_n, on note A'_n le point d'affixe $i\,z_n$ et A_{n+1} le milieu de $[A_nA'_n]$

1 *a* Déterminer les affixes des points A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4, A'_4 et A_5

b Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

Tracer la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$

2 *a* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimez z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de n

b Exprimer $|z_n|$ en fonction de n déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n|$

Interpréter graphiquement le résultat

c Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z_{n+8}) \equiv \arg(z_n)\ (2\pi)$ Interpréter graphiquement le résultat

3 *a* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$

b Interpréter géométriquement le résultat précédent

4 *a* Montrer que pour out entier $n \geq 1$, on a $A_nA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, A_{n-1}A_n$

b Exprimer $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ + A_nA_{n+1}$ en fonction de n

c Etudier la convergence de cette suite (L_n) Interpréter votre résultat

CORRECTION

1 *a* A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2\,i$ et A_1 est le milieu de $[A_0A'_0]$ donc $z_1 = \dfrac{z_0 + z'_0}{2} = \dfrac{2+2\,i}{2}$ donc A_1 a pour affixe $1 + i$

A'_1 est le point d'affixe $i\,z_1$

A_2 est le milieu de $[A_1A'_1]$ donc $z_2 = \dfrac{z_1 + i\,z_1}{2} = \dfrac{1+i}{2} z_1 = i$ donc A_2 a pour affixe i

A'_2 est le point d'affixe $i\,z_2$

A_3 est le milieu de $[A_2A'_2]$ donc $z_3 = \dfrac{z_2 + i\,z_2}{2} = \dfrac{1+i}{2} z_2$ donc A_3 a pour affixe $\dfrac{-1+i}{2}$

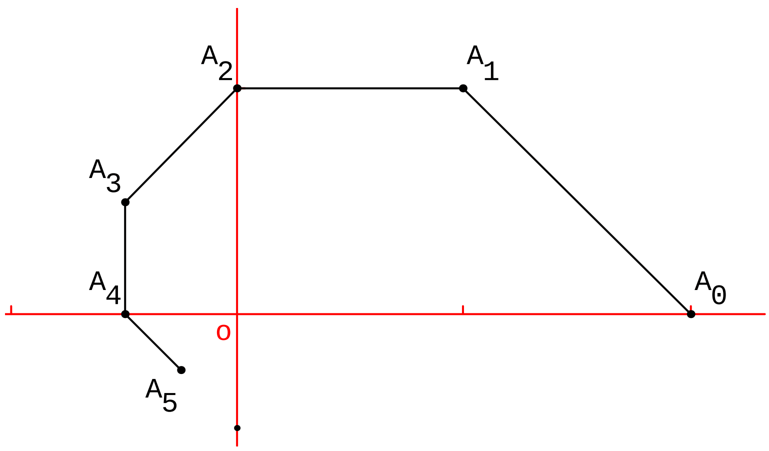
A'_3 est le point d'affixe $i\,z_3$

A_4 est le milieu de $[A_3A'_3]$ donc $z_4 = \dfrac{z_3 + i\,z_3}{2} = \dfrac{1+i}{2} z_3 = \dfrac{1+i}{2} \times \dfrac{-1+i}{2}$ donc A_4 a pour affixe $\dfrac{-1}{2}$

A'_4 est le point d'affixe $i\,z_4$

A_5 est le milieu de $[A_4A'_4]$ donc $z_5 = \dfrac{z_4 + i\,z'_4}{2} = \dfrac{1+i}{2} z_4$ donc A_5 a pour affixe $\dfrac{-1-i}{4}$

b



2 *a* A'_n est le point d'affixe $i\,z_n$

A_{n+1} est le milieu de $[A_nA'_n]$ donc $z_{n+1} = \dfrac{z_n + i\,z_n}{2} = \dfrac{1+i}{2} z_n$

$z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$ donc la suite (z_n) est géométrique de raison $\dfrac{1+i}{2}$ de premier terme $z_0 = 2$ donc $z_n = 2\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

b $|1 + i| = \sqrt{2}$ donc $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $|z_n| = 2\left|\dfrac{1+i}{2}\right|^n = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} | z_n | = 0$

$| z_n | = OA_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} OA_n = 0$, les points A_n sont de plus en plus proches de O

c $z_{n+8} = 2\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{n+8}$ or $(1 + i)^2 = 2 i$ donc $(1 + i)^4 = (2 i)^2 = -4$

$(1 + i)^8 = (-4)^2 = 16$ donc $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^8 = \dfrac{16}{2^8} = \dfrac{1}{16}$

$z_{n+8} = 2\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^8 \times \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^8 z_n$ donc $z_{n+8} = \dfrac{1}{16} z_n$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z_{n+8}) = \arg \dfrac{1}{16} + \arg(z_n)\ (2\pi)$

$\dfrac{1}{16}$ est un réel strictement positif donc $\arg \dfrac{1}{16} \equiv 0\ (2\pi)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z_{n+8}) = \arg(z_n)\ (2\pi)$

$z_{n+8} = \dfrac{1}{16} z_n$ donc $\overrightarrow{OA_{n+8}} = \dfrac{1}{16}\overrightarrow{OA_n}$, les points O, A_n et A_{n+8} sont alignés et $A_{n+8} \in [O A_n]$

3 *a* $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$ donc $z_{n+1} - z_n = \dfrac{1+i}{2} z_n - z_n = \dfrac{-1+i}{2} z_n$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\dfrac{-1+i}{2} z_n}{\dfrac{1+i}{2} z_n} = \frac{-1+i}{1+i} = i$$

b $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc $\arg \dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{OA_{n+1}} ; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$| i | = 1$ donc $OA_n = OA_{n+1}$
Le triangle $OA_n A_{n+1}$ est isocèle et rectangle en A_n

4 *a* $z_{n+1} - z_n = \dfrac{-1+i}{2} z_n$ donc $A_{n+1} A_n = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

$z_n = \dfrac{1+i}{2} z_{n-1}$ donc $z_{n-1} = \dfrac{2}{1+i} z_n = (1-i)\, z_n$

$z_n - z_{n-1} = z_n - (1-i)\, z_n = i\, z_n$ donc $A_{n-1} A_n = | i | |z_n| = z_n|$ donc $A_{n+1} A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1} A_n$

b La suite $(A_n A_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ de premier terme $A_0 A_1 = \sqrt{2}$ donc $L_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}\sqrt{2}$

avec $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $L_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La ligne polygonale $A_0 A_1 A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ a pour longueur limite $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.