Amérique du Sud novembre 2007

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$.
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1.
   c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

2. *a*. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.
   d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n)
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

CORRECTION

1. *a*. Soit $X = x^2 + 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

1. *b*. $f_1'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x \geq 0$ donc $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq 0$ et $f_1'(x) \geq 2$ soit $f_1'(x) > 0$

1. *c*.

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	
f_1	-2 $\nearrow$	$+\infty$

2. *a*. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

Soit $X = x^2 + 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

2. *b*. $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{n}\ln(x^2+1)$ donc $f_n'(x) = 2 + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$

$x \geq 0$ et $n > 0$ donc $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq 0$ et $f_n'(x) \geq 2$ soit $f_n'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	-2 $\nearrow$	$+\infty$

2. *c*. f_n est définie continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f_n([0 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$
$0 \in f_n([0 ; +\infty[)$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.

2. *d*. $f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n}$; $f_n(1) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $0 < \alpha_n < 1$.

3. α_{n+1} est solution de $f_{n+1}(x) = 0$ donc $2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n+1}\ln(\alpha_n^2 + 1) = 0$ donc $\dfrac{1}{n+1}\ln(\alpha_n^2+1) = 2 - 2\alpha_{n+1}$

$\ln(\alpha_n^2 + 1) = (n+1)(2 - 2\alpha_{n+1})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n}\ln(\alpha_n^2 + 1) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n}(n+1)(2 - 2\alpha_{n+1})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = -(2 - 2\alpha_{n+1}) + \dfrac{n+1}{n}(2 - 2\alpha_{n+1})$

$$f_n(\alpha_{n+1}) = (2 - 2\,\alpha_{n+1})\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = 2\,(1 - \alpha_{n+1})\,\frac{1}{n}$$

Pour tout n, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1 - \alpha_{n+1} > 0$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4. *a*. $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$ de plus f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1} < 1$

La suite (α_n) est croissante.

x	0	α_n	α_{n+1}	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$				
f_n	-2	0			$+\infty$

b. (α_n) est croissante majorée par 1 donc est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1 < \alpha_n^2 + 1 < 2$ d'où $0 < \ln(\alpha_n^2 + 1) < \ln 2$ donc $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} < \dfrac{\ln 2}{2n}$

D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{2n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$