Notation : pour tout entier N, non nul, on note s(N) la somme de tous les diviseurs de N (1 et N compris)

Définition : on appelle nombres parfaits les entiers tels que $s(N) = 2N$

1. Calculer $s(6)$; $s(12)$; $s(16)$; $s(24)$; $s(28)$

2. Soit p un entier tel que $2^{p+1} - 1$ soit premier. Vérifier que $2^p(2^{p+1} - 1)$ est parfait.

3. Soit A un nombre premier impair, et p un entier non nul.

Vérifier que 2^p A est parfait si et seulement si $A = 2^{p+1} - 1$.

4. Soit B un nombre impair, non premier, et k son plus grand diviseur autre que B. Soit n un entier non nul. On pose $C = 2^n B$.

a. Montrer que $s(C) = (2^{n+1} - 1)\, s(B)$.

4. *b.* Montrer que C est parfait si et seulement si $B = (s(B) - B)(2^{n+1} - 1)$, ce qui implique que $(s(B)) - B)$ est un diviseur de B.

CORRECTION

1. Les diviseurs de 6 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 donc $s(6) = 12$;

Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 donc $s(12) = 28$;

Les diviseurs de 16 sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 donc $s(16) = 31$;

Les diviseurs de 24 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 donc $s(24) = 60$;

Les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 donc $s(28) = 26$.

2. $2^{p+1} - 1$ est premier donc les diviseurs de $2^p(2^{p+1} - 1)$ sont 1 ; 2 ; … 2^p ; $(2^{p+1} - 1)$; $2(2^{p+1} - 1)$; … $2^p(2^{p+1} - 1)$

$$s(2^p(2^{p+1} - 1)) = \sum_{k=0}^{p} 2^k + \sum_{k=0}^{p} 2^k (2^{p+1} - 1) = \sum_{k=0}^{p} 2^k + (2^{p+1} - 1)\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1}\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1}\frac{2^{p+1} - 1}{2 - 1} = 2^{p+1}(2^{p+1} - 1)$$

donc $s(2^p(2^{p+1} - 1)) = 2 \times 2^p(2^{p+1} - 1))$ donc $2^p(2^{p+1} - 1)$ est parfait.

3. Soit $n = 2^p A$

A est un nombre premier donc les diviseurs de n sont 1 ; 2 ; … 2^p ; A ; 2 A ; … 2^p A

$$s(n) = \sum_{k=0}^{p} 2^k + \sum_{k=0}^{p} 2^k A = \sum_{k=0}^{p} 2^k + A\sum_{k=0}^{p} 2^k = (A + 1)\sum_{k=0}^{p} 2^k = (A + 1)\frac{2^{p+1} - 1}{2 - 1} = (A + 1)(2^{p+1} - 1)$$

$s(n) = 2 \times n \Leftrightarrow (A + 1)(2^{p+1} - 1) = 2 \times 2^p A \Leftrightarrow A(2^{p+1} - 1) + (2^{p+1} - 1) = 2^{p+1} A \Leftrightarrow 2^{p+1} - 1 = A$

2^p A est parfait si et seulement si $A = 2^{p+1} - 1$.

4. *a.* Les diviseurs de B sont $a_0, a_1, a_2, \ldots a_j$ et ceux de 2^n sont : $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^n$.
Les diviseurs de 2^n B sont $a_0 \times 2^0, a_0 \times 2^1, \ldots a_0 \times 2^n, a_1 \times 2^0, a_1 \times 2^1, \ldots a_1 \times 2^n, \ldots$ jusqu'à $a_j \times 2^0, a_j \times 2^1, \ldots a_j \times 2^n$.
Leur somme S(C) vaut donc $a_0 \times 2^0 + a_0 \times 2^1 + \ldots a_0 \times 2^n + a_1 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \ldots a_1 \times 2^n + \ldots + a_j \times 2^0 + a_j \times 2^1 + \ldots a_j \times 2^n$.

$$S(C) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \times \sum_{k=0}^{j} a_k = (2^{n+1} - 1)\, s(B)$$

4. *b.* C est parfait $\Leftrightarrow s(C) = 2C \Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)\, s(B) = 2 \times 2^n B \Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)\, s(B) = 2 \times 2^n B \Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)\, s(B) = 2^{n+1} B$
$\Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)(s(B) - B) = 2^{n+1} B - (2^{n+1} - 1) B$
$\Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)(s(B) - B) = B$

$2^{n+1} - 1 \in \mathbb{N}$ donc $(s(B)) - B)$ est un diviseur de B.