Exercice 1. 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, Cet D ont pour coordonnées respectives A (1 ; – 1 ; 2), B (3 ; 3 ; 8), C (– 3 ; 5 ; 4) et D (1 ; 2 ; 3).

On note D la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et D' la droite ayant pour représentation paramétrique

$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 3 \\ z = -k + 4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

On note P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

Question 1 :

Proposition *a*. Les droites D et D' sont parallèles.
Proposition *b*. Les droites D et D' sont coplanaires.
Proposition *c*. Le point C appartient à la droite D.
Proposition *d*. Les droites D et D' sont orthogonales.

Question 2 :

Proposition *a*. Le plan P contient la droite D et est parallèle à la droite D' .
Proposition *b*. Le plan P contient la droite D' et est parallèle à la droite D.
Proposition *c*. Le plan P contient la droite D et est orthogonal à la droite D' .
Proposition *d*. Le plan P contient les droites D et D' .

Question 3 :

Proposition *a*. Les points A, D et C sont alignés.
Proposition *b*. Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition *c*. Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition *d*. Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :

On note P' le plan contenant la droite D' et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

Proposition *a*. $\vec{n}\,(-1 ; 5 ; 4)$
Proposition *b*. $\vec{n}\,(3 ; -1 ; 2)$
Proposition *c*. $\vec{n}\,(1 ; 2 ; 3)$
Proposition *d*. $\vec{n}\,(1 ; 1 ; -1)$

Exercice 2. 5 points Commun à tous les candidats

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0{,}17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0{,}006$.
Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0{,}17$ et d'écart-type σ_2.
On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,99
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Exercice 3. 6 points Commun à tous les candidats

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur R par : $f_k(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur R. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur R.

4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1 + e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes C_1, C_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

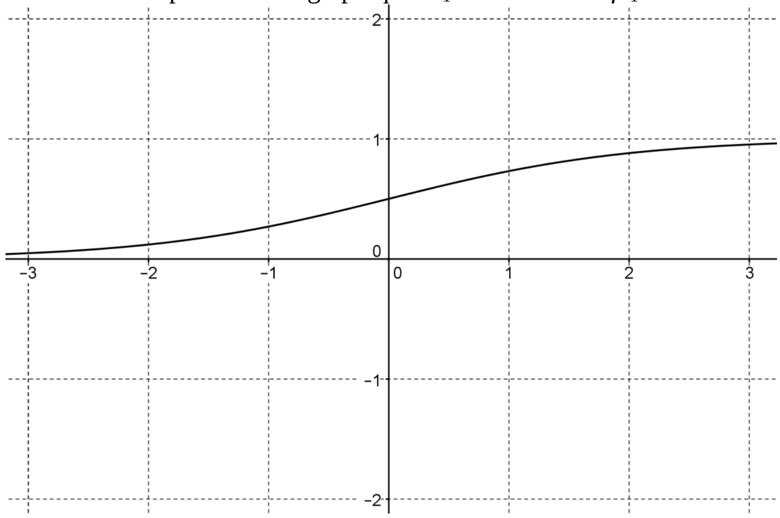
1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

ANNEXE

Représentation graphique C_1 de la fonction f_1



Exercice 4. 5 points Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables : a, b et c sont des nombres réels
i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation : a prend la valeur 3
b prend la valeur 8
Traitement : Saisir n
Pour i variant de 2 à n faire
| c prend la valeur a
| a prend la valeur b
| b prend la valeur …
Fin Pour
Sortie : Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A\,C_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer Q P.

On admet que $A = P\,D\,Q$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = P\,D^n\,Q$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

Exercice 4 Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme No 1	**Algorithme No 2**	**Algorithme No 3**

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	    v prend la valeur 1
	    Afficher v
	    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		    Afficher v
		    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		    Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

CORRECTION

Exercice 1. 4 points Commun à tous les candidats
Question 1 :
Proposition *a*. FAUX
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3). Un vecteur directeur de D’ est $\overrightarrow{u'}$ (1 ; 1 ; – 1)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles

Proposition *b*. FAUX
Si D et D’ sont coplanaires, les deux droites ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes.
Il existe t et k tels que $\begin{cases} x = t + 1 = k + 1 \\ y = 2t - 1 = k + 3 \\ z = 3t + 2 = -k + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \\ 2t = k + 4 \\ 3t = -k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \\ 2t = t + 4 \\ 3t = -t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k \\ t = 4 \\ 4t = 1 \end{cases}$ ce qui est impossibles donc les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

Proposition *c*. FAUX
Il existe t tel que $\begin{cases} -3 = t + 1 \\ 5 = 2t - 1 \\ 7 = 3t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ 2t = 6 \\ 3t = 5 \end{cases}$ ce qui est impossibles donc C $\notin$ D

Proposition *d*. VRAI
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3). Un vecteur directeur de D’ est $\overrightarrow{u'}$ (1 ; 1 ; – 1)
$\vec{u} . \overrightarrow{u'} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$
Les vecteurs directeurs de D et D’ sont orthogonaux donc D et D’ sont orthogonales (et non sécantes d’après la proposition *b*)

Question 2 :
Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}$ (1 ; 1 ; – 1). $\vec{n} = \overrightarrow{u'}$ donc D’ est parallèle à P.
Soit A (1 ; – 1 ; 2) le point de D de paramètre t = 0,
$x + y - z + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 = 0$ donc A $\in$ P donc D est contenue dans P.

Proposition *a*. FAUX
Proposition *b*. FAUX
Proposition *c*. VRAI
Proposition *d*. FAUX

Question 3 :
Proposition *a*. FAUX
$\overrightarrow{AD}$ (0 ; 3 ; 1) , $\overrightarrow{AC}$ (– 4 ; 6 ; 2) ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, D et C ne sont pas alignés.

Proposition *b*. FAUX
$\overrightarrow{AB}$ (2 ; 4 ; 6) , $\overrightarrow{AC}$ (– 4 ; 6 ; 2)
$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 2 \times (-4) + 4 \times 6 + 6 \times 2 = 24$ donc $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} \neq 0$ le triangle ABC n’est pas rectangle en A.

Proposition *c*. VRAI
$\overrightarrow{AB}$ (2 ; 4 ; 6) , $\overrightarrow{AC}$ (– 4 ; 6 ; 2) et $\overrightarrow{BC}$ (– 6 ; 2 ; – 4)
$AB^2 = 4 + 16 + 36 = 56$
$AC^2 = 16 + 36 + 4 = 56$
$BC^2 = 36 + 4 + 16 = 56$ donc le triangle ABC est équilatéral

Proposition *d*. FAUX
L’abscisse du milieu de [AB] est $\frac{x_A + x_B}{2} = 2$ donc le point D n’est pas le milieu du segment [AB].

Question 4 :
Question 4 : Proposition *b*. VRAI
P' est le plan contenant la droite D' et le point A. Un vecteur directeur de D’ est $\overrightarrow{u'}$ (1 ; 1 ; – 1)
Soit E le point de D’ de paramètre k = – 1, le point E de D’ a pour coordonnées (0 ; 2 ; 5) donc $\overrightarrow{AE}$ (– 1 ; 3 ; 3),
$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc (AE) n’est pas parallèle à D’.
Un vecteur normal à ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{u'}$ et à $\overrightarrow{AE}$.

Proposition *a*. $\vec{n}\,(-1\,;5\,;4)$ **FAUX** car $\vec{n}\,.\,\vec{u'} = 3\times 1+5\times 1+4\times(-1)\neq 0$

Proposition *b*. $\vec{n}\,(3\,;-1\,;2)$ **VRAI**

$\vec{n}\,.\,\vec{u'} = 3\times 1+(-1)\times 1+2\times(-1)=0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 3\times(-1)+(-1)\times 3+2\times 3$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 0$

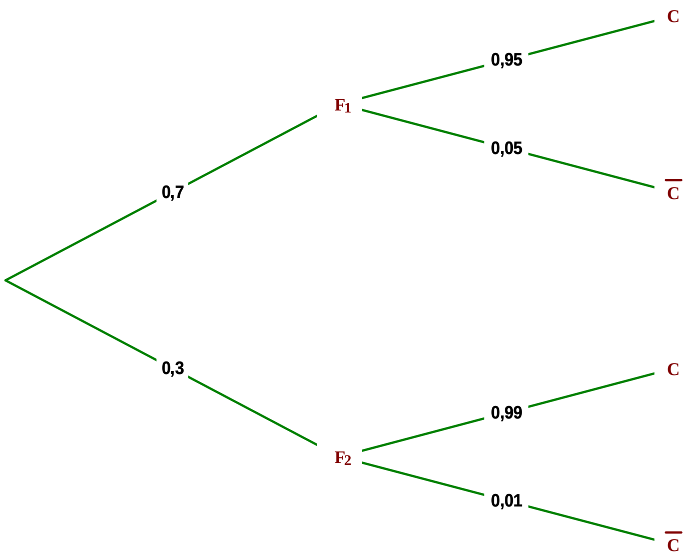
Proposition *c*. $\vec{n}\,(1\,;2\,;3)$ **FAUX** car $\vec{n}\,.\,\vec{u'} = 1\times 1+2\times 1+3\times(-1)=0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AE}} = -1\times 1+3\times 2+3\times 3$ donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AE}} \neq 0$

Proposition *d*. $\vec{n}\,(1\,;1\,;-1)$ **FAUX** car $\vec{n} = \vec{u'}$

Exercice 2. 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. » : $p(F_1\cap C) = 0{,}7\times 0{,}95 = 0{,}665$

3. $p(C) = p(F_1\cap C)+p(F_2\cap C)$ donc $p(C) = 0{,}665+0{,}3\times 0{,}99 = 0{,}962$

4. $p_C(E) = \dfrac{p(E\cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}3\times 0{,}99}{0{,}962}$ soit environ 0,309

Partie B

1. $p(C) = p(0{,}16\leq X\leq 0{,}18) = 0{,}9044$

2. *a*. La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite.

***b*.** Lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18]. Z appartient à $\left[\dfrac{0{,}16-0{,}17}{\sigma_2}\,;\dfrac{0{,}18-0{,}17}{\sigma_2}\right]$ soit $\left[\dfrac{-0{,}01}{\sigma_2}\,;\dfrac{0{,}01}{\sigma_2}\right]$

c. $P\left(\dfrac{-0{,}01}{\sigma_2}\leq Z\leq \dfrac{0{,}01}{\sigma_2}\right) = 0{,}99$ donc $\dfrac{0{,}01}{\sigma_2} = 2{,}575\,8$ donc $\sigma_2 = \dfrac{0{,}01}{2{,}575\,8}$ soit $\sigma_2\approx 0{,}004$

Exercice 3. 6 points **Commun à tous les candidats**

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_1 en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C_1 en $+\infty$

2. Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})}$ or $e^{x} \times e^{-x} = 1$ donc pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

3. Pour tout réel x, $f'_1(x) = \dfrac{e^{x}(1+e^{x}) - e^{x} \times e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$ donc $f'_1(x) = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$.

Pour tout x réel, $e^{x} > 0$ donc $f'_1(x) > 0$ donc la fonction f_1 est strictement croissante sur R.

4. $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{x}$ donc une primitive de f_1 est $\ln[1 + e^{x}]$

$I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[\ln(1+e^{x})\right]_0^1 = \ln(1+e) - 2\ln(1+e^{0})$ donc $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

I est une mesure du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_1, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

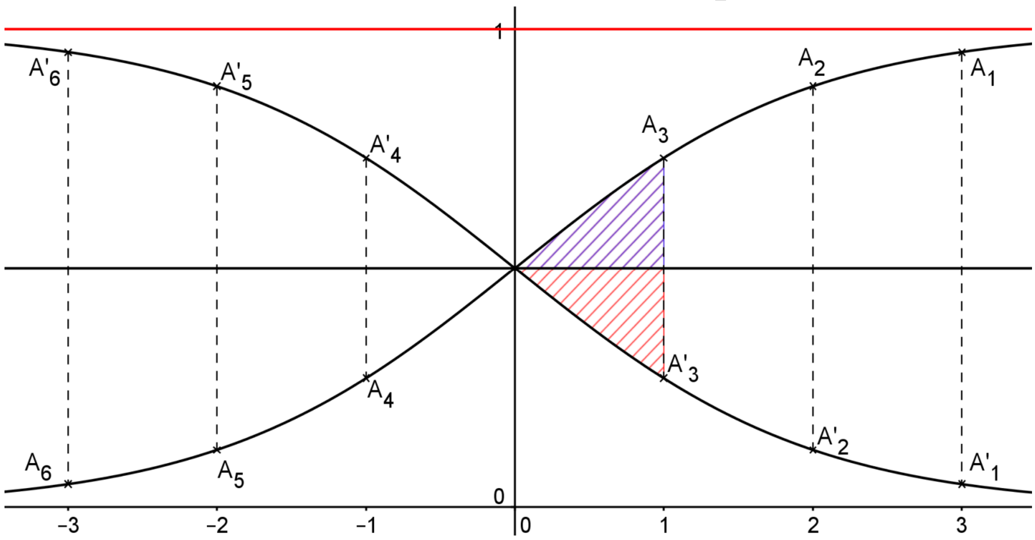
1. $f_{-1}(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$ et $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ donc pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. P est le point de C_1 d'abscisse x et d'ordonnée $f_1(x)$ et M le point de C_{-1} d'abscisse x et d'ordonnée $f_1(-x)$.

K est le milieu du segment [MP] donc a pour ordonnée $\dfrac{1}{2}[f_1(x) + f_{-1}(x)]$ donc $\dfrac{1}{2}$.

Le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Les courbes C_1 et C_{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.



4. l'aire du domaine hachuré en bleu est égale à $I - 0{,}5$ donc $A = 2I - 1$ soit $2\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) - 1$ unités d'aires.

Partie C

1. **VRAI,** Pour tout x réel, $1 + e^{-kx} > 1$ donc $0 < f_k(x) < 1$

2. **FAUX** Si $k = 0$, f_k est une fonction constante égale à $\dfrac{1}{2}$.

$f'_k(x) = \dfrac{-(-k)e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^{2}}$ donc $f'_k(x)$ *a* le même signe que k, si $k < 0$, $f_k(x)$ est décroissante.

3. **VRAI** Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}}$ donc si $k \geq 10$, $e^{-\frac{k}{2}} < e^{-5}$ donc $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) > \dfrac{1}{1+e^{-5}} > 0{,}99$

Exercice 4. 5 points Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5 \times 8 - 6 \times 3 = 22$ et $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 5 \times 22 - 6 \times 8 = 62$

2.

Variables :	*a*, *b* et *c* sont des nombres réels *i* et *n* sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2	
Initialisation :	*a* prend la valeur 3 *b* prend la valeur 8	
Traitement :	Saisir *n* Pour *i* variant de 2 à *n* faire	
		c prend la valeur *a* *a* prend la valeur *b* *b* prend la valeur **$5 \times a - 6 \times c$**
	Fin Pour	
Sortie :	Afficher *b*	

b. La suite (u_n) semble être croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A \neq O$ donc $A^0 = I$

Initialisation : $C_0 = A^0 C_0$

Hérédité : Montrons que pour tout *n* de N, si $C_n = A^n C_0$ alors $C_{n+1} = A^{n+1} C_0$

$C_{n+1} = A\, C_n$ et $C_n = A^n C_0$ donc $C_{n+1} = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel *n*, $C_n = A^n C_0$

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$Q\,P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $Q\,P = I$

Initialisation : $A^1 = P\,D\,Q$

Hérédité : Montrons que pour tout *n* de N*, si $A^n = P\,D^n\,Q$ alors $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,Q$

$A^{n+1} = A \times A_n = P\,D\,Q \times P\,D^n\,Q = P\,D \times D^n\,Q = P\,D^{n+1}\,Q$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel *n* non nul, $A^n = P\,D^n\,Q$.

5. Pour tout entier naturel non nul *n*, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

$u_n = (-2^n + 3^n) \times 8 + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n) \times 3$

$u_n = 2^n + 3^n \times 2$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'algorithme 1 ne convient pas : il affiche seulement la dernière valeur obtenue donc v_n
L'algorithme 2 ne convient pas : il affiche toujours 1
L'algorithme 3 convient : il affiche v_0, v_1 … v_{n-1} puis à la fin de la boucle, il affiche v_n.

2. La suite v_n semble être croissante et converger vers 2,97

3. *a.* Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$
Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $0 < v_n < 3$ alors $0 < v_{n+1} < 3$

$0 < v_n < 3$ donc $3 < 6 - v_n < 6$ donc $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$ soit $0 < v_{n+1} < 3$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$

Pour tout n de N, $0 < v_n < 3$ donc $6 - v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$
La suite (v_n) est strictement croissante.

c. La suite (v_n) est strictement croissante, majorée par 3 donc est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

1. $w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 3}$ or $v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$ donc $v_{n+1} - 3 = \frac{3v_n - 9}{6 - v_n}$ donc $w_{n+1} = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)}$

$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3}$

$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n - 3}{3(v_n - 3)} = -\frac{1}{3}$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$

2. (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ de premier terme $w_0 = \frac{1}{v_0 - 3} = -\frac{1}{2}$ donc $w_n = w_0 + n\,r = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n$

$w_n = -\frac{3 + 2n}{6}$

$v_n - 3 = \frac{1}{w_n} = -\frac{6}{3 + 2n}$ donc $v_n = 3 - \frac{6}{3 + 2n}$

3. $v_n = 3 - \frac{6}{3 + 2n}$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 3$