Asie juin 2007

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5 i.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
   b. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.
   c. Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A′ et B′ les points d'affixes respectives 8 + 4 i et 2 + i.
   a. Démontrer que les points A′ et B′ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.
   b. Vérifier que $s(B') = A'$.
   c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.
   a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.
   b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA].
   On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].
   En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).
   On note A′ et B′ les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.
   a. Déterminer les images des droites (BB′) et D par la similitude s.
   b. Déterminer le point $s(B')$.
   c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′]

CORRECTION

Partie I

1. *a*. Il existe une unique similitude directe s telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$, son écriture complexe est : $z' = a z + b$, a et b étant deux complexes.

En utilisant les affixes des deux points O et B et de leurs images : $10 = a \times 0 + b$ et $0 = a \times 5\,i + b$ donc $b = 10$ et $a = -\frac{10}{5\,i} = 2\,i$

L'écriture complexe de s est donc $z' = 2\,i\,z + 10$.

b. L'écriture complexe de s est donc $z' = 2\,i\,z + 10$ donc le rapport de s est $|2\,i| = 2$, l'angle de la similitude est $\arg(2\,i) = \frac{\pi}{2}$

Le centre de la similitude est le point invariant par f donc dont l'affixe est solution de $z = 2\,i\,z + 10$

soit $z = \frac{10}{1 - 2\,i} = \frac{10\,(1 + 2\,i)}{5} = 2 + 4\,i$

La similitude s a pour centre Ω (2 + 4 i), pour rapport 2 et pour angle $\frac{\pi}{2}$.

c. $s \circ s(B) = s(O) = A$.

La similitude s a pour centre Ω (2 + 4 i), pour rapport 2 et pour angle $\frac{\pi}{2}$ donc s o s est la similitude de centre Ω (2 + 4 i), de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc l'homothétie de centre A de rapport – 4 donc $\overrightarrow{\Omega A} = -4\,\overrightarrow{\Omega B}$ donc Ω, A et B sont alignés.

$s(O) = A$ donc $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc (ΩO) et (ΩA) sont orthogonales, Ω est le pied de la hauteur issue de O du triangle OAB.

2. *a*. $A' \in D$ et $B' \in D$. Un vecteur normal à D est le vecteur $\vec{w}\,(1 ; -2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $(-2 ; -4)$ donc est colinéaire au vecteur $\vec{w}$ donc (AA′) est perpendiculaire à D et A′ est le projeté orthogonal de A sur D.
De même B′ est le projeté orthogonal de B sur D.

b. L'affixe de $s(B')$ est : $z' = 2\,i\,(2 + i) + 10 = 4\,i + 8 = z_{A'}$ donc $s(B') = A'$

c. L'angle de la similitude étant égal à $\frac{\pi}{2}$, et s(B') = A' alors $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Le triangle ΩA'B' est rectangle en Ω donc le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].

Partie II

1. *a*. s est la similitude directe de centre Ω telle que s(O) = A et s(B) = O. donc l'angle de la similitude est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO})$

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}) = \arg\frac{-z_A}{z_B}$ or $\frac{-z_A}{z_B} = \frac{-10}{5i} = 2i$ donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{2}$.

b. s(O) = A donc $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle ΩOA est rectangle en Ω donc Ω appartient au cercle de diamètre [OA].

De même le triangle ΩOB est rectangle en Ω donc Ω appartient au cercle de diamètre [OB].

La droite (OΩ) perpendiculaire aux droites (ΩA) et (ΩB) est donc (d'après l'unicité de la perpendiculaire à une droite) à la droite (AB). Ω est donc le pied de la hauteur issue de O du OAB.

2. s est la similitude directe de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc l'image par s de (BB') est la droite passant par s(B) = O et orthogonale à (BB')

B′ est le projeté orthogonal de B sur la droite D donc (BB') est perpendiculaire à D. O appartient à D donc D est la droite passant par s(B) = O et orthogonale à (BB') donc l'image par s de la droite (BB′) est la droite D.

De même l'image par s de (AA') est une droite passant par s(A) et orthogonale à (AA')

A′ est le projeté orthogonal de A sur la droite D donc (AA') est perpendiculaire à D.

soit s(A') = A″ , s(O) = A , or l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{AA''}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

or O appartient à D donc D = (OA′) et D est perpendiculaire à (AA″) ; il existe une seule droite perpendiculaire à D passant par A donc il existe une seule droite perpendiculaire à D passant par A donc (AA″) =(AA′) donc l'image de D est la droite (AA′).

B′ ∈ (BB′) et s((BB')) = D donc B' a pour image un point de D
B′ ∈ D et s(D) = (AA') donc B' a pour image un point de (AA′).
L'image de B′ appartient à D et à (AA′) donc est un point de l'intersection ces deux droites donc est A′. s (B′) = A′.

b. Par la similitude s de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$, B' est transformé en A' donc $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Le triangle ΩA'B' est rectangle en Ω donc le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′].