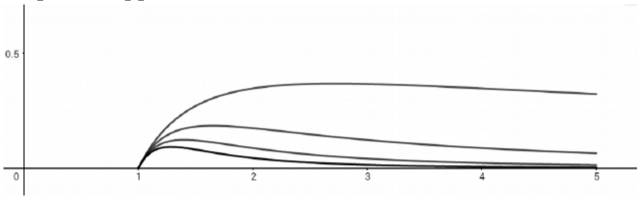
EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$

Pour tout entier $n > 0$, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes C_n pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $f'_n(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$. On note A_n le point de la courbe C_n ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. *a.* Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $0 \le \dfrac{\ln(x)}{x^n} \le \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe C_n c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe C_n.

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$, soit $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^n & v'(x) = n\,x^{n-1} \end{cases}$

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - n\,x^{n-1}\ln(x)}{(x^n)^2} = \frac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}}, \text{ donc } f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$ donc l'abscisse de A_n est solution de $f'(x) = 0$ soit $1 - n\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

$x^n = \mathrm{e}$ donc $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}$ le point A_n a pour coordonnées $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} ; \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}\right)$.

$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x_{A_n}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}} = y_{A_n}$ donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$.

3. *a.* La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1 ; 5]$ donc pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $\ln(1) \le \ln(x) \le \ln(5)$ soit $0 \le \ln(x) \le \ln(5)$, $x^n > 0$ donc en multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{x^n}$ on obtient que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $0 \le \dfrac{\ln(x)}{x^n} \le \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

b. Pour tout entier $n > 1$, une primitive de la fonction définie sur $[1 ; 5]$ par $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ est la fonction F définie sur $[1 ; 5]$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}} \text{ donc } \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(5) - \mathrm{F}(1) = -\frac{1}{(n-1) \times 5^{n-1}} - \left(-\frac{1}{(n-1)}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c. La fonction f est positive sur $[1 ; 5]$ donc l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe C_n est $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $n > 1$, $0 \le \dfrac{\ln(x)}{x^n} \le \dfrac{\ln(5)}{x^n}$ donc $0 \le \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$

Soit $0 \le \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ et $5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$

La valeur limite de l'aire sous la courbe C_n quand n tend vers $+\infty$ est 0.