Partie A

Soit u la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur] 0 ; + ∞ [et préciser ses limites en 0 et en + ∞.

2. *a*. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur] 0 ; + ∞ [.

On note α cette solution.

***b*.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur] 0 ; + ∞ [.

1. Exprimer, pour tout x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur] 0 ; + ∞ [.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à] 0 ; + ∞ [.

1. Montrer que la distance AM est donnée par AM = $\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

***a*.** Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [.

***b*.** Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

***c*.** Montrer que AP = $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

CORRECTION

Partie A

1. u est définie continue dérivable (somme de fonctions continues et dérivables sur] 0 ; + ∞ [) sur] 0 ; + ∞ [et $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

$x > 0$ donc $u'(x) > 0$ sur] 0 ; + ∞ [donc u est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 2 = -2$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

2. *a*. La fonction u est définie continue strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $u($] 0 ; + ∞ [$) = \mathbb{R}$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur] 0 ; + ∞ [.

***b*.** $u(1{,}31) \approx -0{,}014$ et $u(1{,}32) \approx 0{,}02$ donc $1{,}31 \le \alpha \le 1{,}32$

3. u est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $u(\alpha) = 0$ donc

x	0		α		+ ∞
$u(x)$	‖	–	0	+	

4. $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

1. Pour dériver $(2 - \ln x)^2$ il faut utiliser, par exemple, que $(u^2)' = 2u'u$ avec $u(x) = 2 - \ln x$ et $u'(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) = 2\,\frac{x^2 - 2 + \ln x}{x}$ donc $f'(x) = \frac{2}{x}u(x)$

2.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. M a pour coordonnées (x ; ln x) donc $\overrightarrow{\text{MA}}$ a pour coordonnées ($-x$; $2 - \ln x$)

$\text{AM}^2 = \text{MA}^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$ donc la distance AM est donnée par AM = $\sqrt{f(x)}$.

2. *a.* Soit la fonction $h : x \to \sqrt{x}$.

$g = h \circ f$ or h est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [donc g et f ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [.

b. g et f ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [, f admet un minimum en α donc g admet également un minimum en α.
AM = $g(x)$ donc la distance AM est minimale en P (α ; ln α).

c. $f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2$ or $2 - \ln \alpha = \alpha^2$ d'après la question 4. de la partie A donc $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^2 (1 + \alpha^2)$
$\alpha > 0$ donc $g(\alpha) = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ donc AP = $g(\alpha) = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. $\overrightarrow{\text{AP}}$ a pour coordonnées (α ; ln $\alpha - 2$)

La tangente à Γ en P a pour équation $y = \dfrac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha$ donc a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha\,;\,1)$

$\overrightarrow{\text{AP}} \cdot \vec{u} = \alpha^2 + \ln \alpha - 2 = u(\alpha) = 0$ donc La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P.