Antilles-Guyane juin 2008

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	$\mathbb{Z}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$ (modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre $\mathbb{Z}$.

La lettre L est donc codée par la lettre $\mathbb{Z}$.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j , on a : $11x \equiv j$ (modulo 26) équivaut à $x \equiv 19j$ (modulo 26).

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

CORRECTION

Partie A

1. $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$ donc le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

$11x - 26y = 1$ et $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$ donc par soustraction membre à membre : $11(x + 3) - 26(y + 3) = 0$

$11(x + 7) = 26(y + 3)$ donc 11 divise $26(y + 3)$ or 11 et 26 sont premiers entre eux donc 11 divise $y + 3$

Il existe un entier relatif k tel que $y + 3 = 11k$ donc en remplaçant dans $11(x + 7) = 26(y + 3)$, on obtient que $x + 7 = 26k$

donc $x = 26k - 7$ et $y = 11k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification : si $x = 26k - 7$ et $y = 11k - 3$ donc $11x - 26y = 11 \times 26k - 77 - 11 \times 26k + 78 = 1$

donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(26k - 7 ; 11k - 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) et $0 \leq u \leq 25$, donc il existe un entier relatif k tel que $u = 26k - 7$

$0 \leq u \leq 25 \Leftrightarrow 7 \leq 26k \leq 32 \Leftrightarrow k = 1$ donc $u = 26 - 7 = 19$ et $v = 11 - 3 = 8$

Si $u = 19$ et $v = 8$, le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ est solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

1. La lettre W est assimilée au nombre 22 ; $22 \times 11 + 8 = 250$ or $250 \equiv 16$ (modulo 26) ; 16 est le reste de la division euclidienne de 250 par 26. Au nombre 16 correspond la lettre Q.

La lettre W est donc codée par la lettre Q.

2. *a.* $11x \equiv j$ (modulo 26) $\Leftrightarrow 11 \times 19x \equiv 19j$ (modulo 26)

or $11 \times 19 = 209 = 26 \times 8 + 1$ donc $11 \times 19 \equiv 1$ (modulo 16)

$11x \equiv j$ (modulo 26) $\Leftrightarrow 11 \times 19x \equiv 19j$ (modulo 26) $\Leftrightarrow x \equiv 19j$ (modulo 26)

b. Pour décoder le nombre j, il faut trouver la lettre x telle que $11x + 8 \equiv y$ (modulo 26)

soit $11x \equiv y - 8$ (modulo 26) $\Leftrightarrow x \equiv 19(y - 8)$ (modulo 26) $\Leftrightarrow x \equiv 19y - 22$ (modulo 26) $\Leftrightarrow x \equiv 19y + 4$ (modulo 26)

On « décode » tout nombre entier y compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $19y + 4$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26, que l'on appelle x.

y est alors « décodé » par x.

c. La lettre W est assimilée au nombre 22 ; $22 \times 19 + 4 = 422$ or $422 \equiv 6$ (modulo 26) ; 6 est le reste de la division euclidienne de 422 par 26. Au nombre 6 correspond la lettre G.

La lettre W est donc décodée par la lettre G.