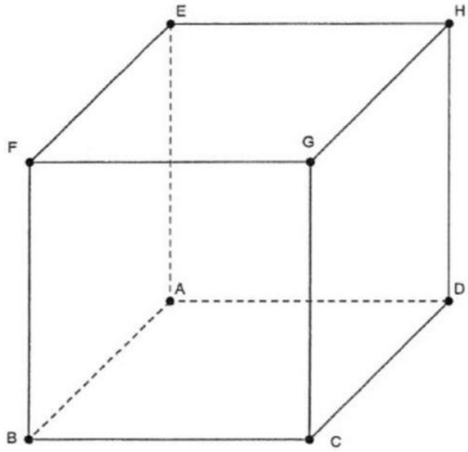
Exercice 1. (4 points) Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points $I\left(1\ ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0\ ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\ ; 0 ; 1\right)$ et L (a ; 1 ; 0) avec a un nombre réel appartenant â l'intervalle [0 ; 1].



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

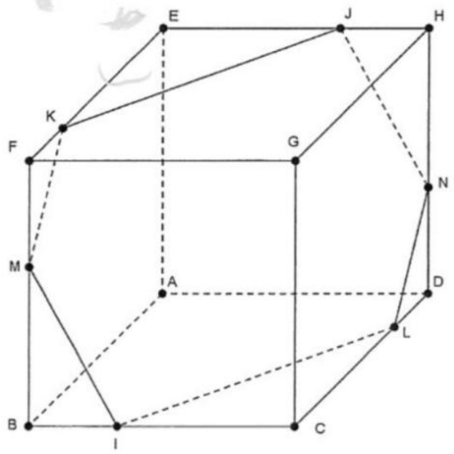
Partie B

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ; 1 ; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N.

Exercice 2 (5 points) Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. *a.* Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2} e - \frac{n+1}{2} I_n$$

d. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$
	Affecter à u la valeur
	Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite,

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

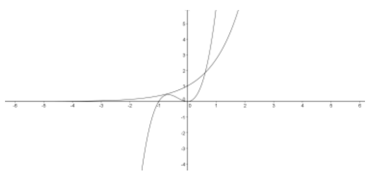
Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3 (6 points) Commun à tous les candidats

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. *a.* Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1 ; 0[$ $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x$.

Montrer que, sur $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, on a $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$.

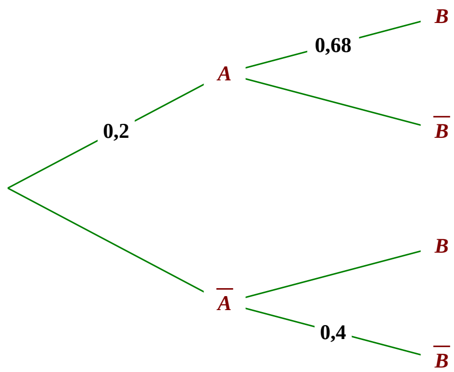
b. Déterminer les variations de la fonction h.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

4. Conclure quant à. la conjecture de la **partie A.**

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



1.

Affirmation : la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.

2. On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard deux boules dans l'urne.

Affirmation : il existe une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\frac{9}{22}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation t d'écriture complexe :

$$z' = -\mathrm{i}\,z + 5 + \mathrm{i}.$$

Affirmation : la transformation t est la rotation de centre A d'affixe $3 - 2\,\mathrm{i}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

4. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - z\,\overline{z} - 1 = 0$.
Affirmation : l'équation (E) admet au moins une solution.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -1,\ b = \mathrm{i} \text{ et } c = \sqrt{3} + \mathrm{i}\,(1 - \sqrt{3}).$$

Affirmation : le triangle ABC possède un angle dont une mesure est égale à 60°.

Exercice 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3\,x - 2\,y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2\,k\ ;\ 13 + 3\,k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 3\,n + 1$ et $b = 2\,n + 3$.
Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 2\,n\,2 + 7\,n + 21$ et $b = 2\,n + 2$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4\,\mathrm{i}$.
On note s la similitude directe de centre A, de $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Affirmation : la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe : $z' = \frac{1 - \mathrm{i}}{2} z + \frac{-1 + 7\,\mathrm{i}}{2}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 + 2\,\mathrm{i},\ b = 4 - \mathrm{i},\ c = 1 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\,(3 + \sqrt{3}) \text{ et } d = 4 + \sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Affirmation : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

CORRECTION

Exercice 1. (4 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1. La droite (IJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ de coordonnées $\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$, c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{IM}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ ($t \in \mathbb{R}$)

donc a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t \\ z=0+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Le point de $\mathcal{D}$ de paramètre t' = 0, a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ donc K $\in \mathcal{D}$.

Le point de $\mathcal{D}$ de paramètre t' = 1, a pour coordonnées (a ; 1 ; 0) donc L $\in \mathcal{D}$.

K $\neq$ L donc la droite $\mathcal{D}$ est la droite (KL) donc la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=t' \\ z=1-t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. Cherchons le point d'intersection s'il existe des droites (IJ) et (KL).

Il faut donc chercher t et t' tels que $\begin{cases} x=1-t=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t=t' \\ z=t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4t=3+t'(4a-3) \\ 1+t=3t' \\ z=t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=4t+t'(4a-3) \\ 1+t=3t' \\ z=t=1-t' \end{cases}$

Les deux dernières lignes conduisent au système $\begin{cases} -t+3t'=1 \\ t+t'=1 \end{cases}$ donc par addition terme à terme : $\begin{cases} 4t'=2 \\ t+t'=1 \end{cases}$ donc $t = t' = \frac{1}{2}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si, lorsque $t = t' = \frac{1}{2}$, on a : $4t + t'(4a-3) = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2}(4a-3) = 1$

$\Leftrightarrow 2 + 2a - \frac{3}{2} = 1 \Leftrightarrow 2a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

1. Le vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{3};1\right)$. $\overrightarrow{\mathrm{LJ}}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{3};1\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{IK}} = \overrightarrow{\mathrm{LJ}}$ donc le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. *a.* $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IK}} = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = -2 - 3 + 5 = 0$

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 8 \times (-1) + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 1 = -8 + 3 + 5 = 0$

Les points I, J, K ne sont pas alignés donc n est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ non colinéaires du plan (IJK) donc le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK) donc le plan (IJK) a une équation de la forme : $8x + 9y + 5z + d = 0$ où d est un réel.

I est un point du plan donc $8 \times 1 + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 0 + d = 0$ soit $8 + 3 + d = 0$ donc $d = -11$

Le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

c. M est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF).

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ donc la droite (BF) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de M doivent vérifier $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $8 \times 1 + 9 \times 0 + 5 \times t - 11 = 0$ donc $5t = 3$ donc $t = 0{,}6$.

Les coordonnées de M sont (1 ; 0 ; 0,6).

N est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ donc la droite (DH) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées de M doivent vérifier $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ et $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, donc $8 \times 0 + 9 \times 1 + 5 \times t - 11 = 0$ donc $5t = 2$ donc $t = 0{,}4$

Les coordonnées de N sont (0 ; 1 ; 0,4).

Exercice 2 (5 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée de e^u est $u'\,e^u$ donc $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2\,x \times e^{x^2} = g(x)$ donc la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. $I_1 = \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

c. $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1} \times x\,e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n+1} \times g(x)\,dx$

Soit $\begin{cases} u'(x) = g(x) & u(x) = G(x) \\ v(x) = x^{n+1} & v'(x) = (n+1)\,x^n \end{cases}$ alors $I_{n+2} = \left[x^{n+1}\,G(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,x^n \times G(x)\,dx$

$I_{n+2} = \left[x^{n+1}\,G(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,x^n \times G(x)\,dx$ donc $I_{n+2} = G(1) - \int_0^1 \frac{1}{2}(n+1)\,x^n \times x\,g(x)\,dx$

$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(n+1)\int_0^1 x^{n+1}g(x)\,dx$ soit $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$

.

d. Si $n = 1$, l'égalité précédente devient : $I_3 = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}I_1 = \frac{1}{2}e - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right)$ donc $I_3 = \frac{1}{2}$.

Si $n = 3$, l'égalité précédente devient : $I_5 = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}I_3 = \frac{1}{2}e - 2 \times \frac{1}{2}$ donc $I_5 = \frac{1}{2}e - 1$.

2. L'algorithme calcule à l'aide de la relation $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$, pour les valeurs impaires de n.

La dernière étape est pour n=19, u prend la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{19+1}{2}u$, et n prend la valeur 19 + 2 donc 21

$n = 21$ donc l'algorithme s'arrête et affiche I_{21}.

3. *a.* Pour tout entier naturel non nul n, la fonction $x \to x^n\,e^{x^2}$ est continue (produit de fonctions continues) positive sur $\mathbb{R}$, et 1 > 0 donc, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

b. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\,e^{x^2}dx - \int_0^1 x^n\,e^{x^2}dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}\,e^{x^2} - x^n\,e^{x^2} \right)dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n\,(x-1)\,e^{x^2}\,dx$

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction $x \to x^n\,(x-1)\,e^{x^2}$ est continue négative sur $\mathbb{R}$, et 1 > 0 donc, pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} - I_n \leq 0$, la suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente. Soit ℓ sa limite,

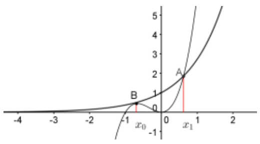
4. Sur [0 ; 1], $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq e^{x^2} \leq e$ donc $0 \leq x^n\,e^{x^2} \leq e\,x^n$.

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $0 \leq \int_0^1 x^n\,e^{x^2}dx \leq \int_0^1 x^n\,e\,dx$ soit $0 \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n\,dx$

donc $0 \leq I_n \leq e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ donc $0 \leq I_n \leq e \times \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Exercice 3 (6 points) Commun à tous les candidats
Partie A : conjecture graphique
À l'aide du graphique ci-dessus, l'équation (E) semble avoir 2 solutions, l'une comprise entre 0 et 1, l'autre entre – 1 et 0.



Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique
1. *a.* $x^2 + x^3 = x^2 (x + 1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$+$		$+$	0	$+$	
x^2+x^3		$-$	0	$+$	0	$+$	

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, or $x^2 + x^3 \leq 0$ sur $]-\infty ; -1]$ donc l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

c. $e^0 = 1$ donc si $x = 0$, $x^2 + x = 0$ donc six $= 0$, $e^x \neq x^2 + x^3$ donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. Sur $]-1 ; 0[\ ]0 ; +\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x)$
Sur $]-1 ; 0[\ ]0 ; +\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln[3 x^2 (1 + x)] \Leftrightarrow e^x = 3 x^2 (x + 1)$
Sur $]-1 ; 0[\ ]0 ; +\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow e\,x = 3 (x^2 + x^3)$
Sur $]-1 ; 0[\ ]0 ; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

a. $h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x$ donc $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{1+x} - 1$

$h'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$ donc pour tout nombre réel x appartenant à $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, on a :

$h'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$

Remarque : On ne peut pas transformer $\ln(x^2)$ en $2 \ln x$ car $x\ ]-1 ; 0[\ ]0 ; +\infty[$, donc x peut être négatif, il aurait fallu écrire :
$\ln(x^2) = 2 \ln |x|$.
.
b. $-x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

c. $h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x$ donc $h(1 - \sqrt{3}) \approx -0{,}11$ donc $h(1 - \sqrt{3}) < 0$ or h admet un maximum en $1 - \sqrt{3}$ sur $]-1 ; 0[$ donc $h < 0$ sur $]-1 ; 0[$
L'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1 ; 0[$.
$\lim\limits_{u \to 0} \ln u = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x^2) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$.
$h(1 + 3) \approx 1{,}69$ donc $h(1 + 3) > 0$
La fonction h est définie continue strictement croissante sur $]0 ; 1 + \sqrt{3}[$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$ et $h(1 + 3) > 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0 ; 1 + \sqrt{3}[$.
$h(0{,}62) \approx 0.00497$ et $h(0{,}61) \approx -0.02375$ donc $0{,}61 < \alpha < 0{,}62$

Quand $x > 0$: $h(x) = \ln 3 + x\left(2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = \ln 3 + x\left(2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

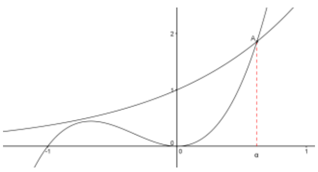
La fonction h est définie continue strictement décroissante sur $[\,1 + \sqrt{3}\ ; +[$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ et $h(1 + \sqrt{3}) > 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution β sur $[\,1 + \sqrt{3}\ ; +\infty\,[$.

$h(7,11) \approx 0.00471$ et $h(7,12) \approx -0.00124$ donc $7,11 < \beta < 7,12$.

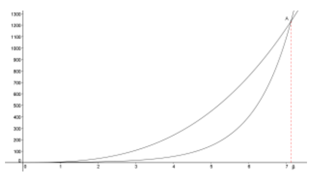
4. Résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre l'équation $h(x) = 0$

La conjecture de la **partie A** est fausse : la fonction h ne s'annule sur $]-1\ ; 0\,[$ et $h(x) = 0$ admet deux solutions et non une seule sur $]\,0\ ; +\infty\,[$.

Un zoom aurait permis de vérifier sur $]-1\ ; 0\,[$,

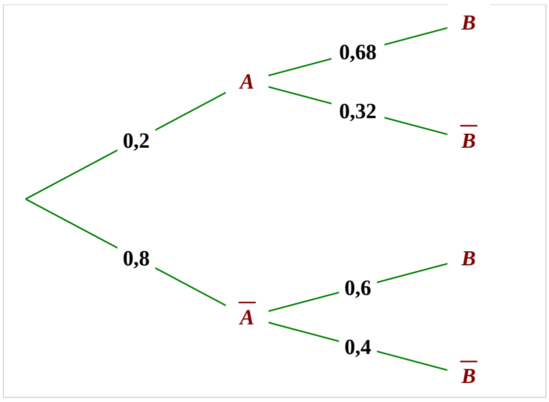


Il aurait été plus compliqué de trouver graphiquement β.



Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Affirmation : FAUSSE



$p(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}68 = 0{,}136$ et $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}68 + 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}616$ donc $p_B(A) = \dfrac{0{,}136}{0{,}616} \approx 0{,}22$.

2. Affirmation : VRAIE

Le nombre de cas possibles est $\dbinom{n+3}{2} = \dfrac{(n+3)!}{2!(n+1)!} = \dfrac{1 \times 2 \times \ldots \times n(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times \ldots \times n(n+1)} = \dfrac{(n+2) \times (n+3)}{2}$.

Le nombre de cas favorables est $\dbinom{n}{1} \times \dbinom{3}{1} = 3n$ (choisir une boule parmi les n qui sont noires et 1 parmi les 3 qui sont blanches

donc la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{3n}{\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}} = \dfrac{6n}{(n+2)(n+3)}$

Il faut donc chercher n tel que $\dfrac{6n}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{9}{22}$ soit $22 \times 6n = 9(n+2)(n+3)$ donc $3n^2 + 15n + 18 = 44n$

soit $3n^2 - 29n + 18 = 0$

Les solutions de $3x^2 - 29x + 18 = 0$ sont $x = 9$ et $x = \dfrac{2}{3}$, donc il existe une valeur de n ($n = 9$) pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$.

3. Affirmation : VRAIE

La rotation de centre A d'affixe 3 – 2 i et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$, a pour écriture complexe $z' - z_A = e^{i\frac{-\pi}{2}}(z - z_A)$

$e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i$ donc $z' = -iz + iz_A + z_A$ soit $z' = -iz + 3i + 2 + 3 - 2i$ donc $z' = -iz + 5 + i$

La transformation t d'écriture complexe : $z' = -iz + 5 + i$ est la rotation de centre A d'affixe 3 – 2 i et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Affirmation : FAUSSE

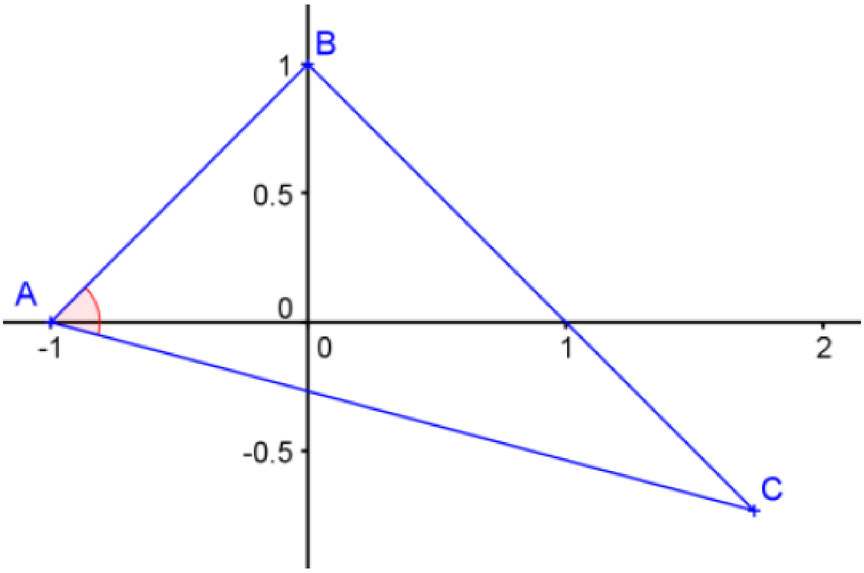
$z^2 - z\overline{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z(z - \overline{z}) = 1$

En posant $z = x + iy$ (x et y réels) alors $(x + iy)(2iy) = 1 \Leftrightarrow -2y^2 + 2ixy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 = 1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ avec x et y réels

or pour tout y réel, $-2y^2 < 0$ donc $-2y^2 \neq 1$ donc l'équation (E) n'admet pas de solution.

5. Affirmation : VRAIE

Evaluons l'angle CAB .



AC a pour coordonnées (3 + 1 ; 1 – 3)
donc AC 2 = (3 + 1) 2 + (1 – 3) 2 = 3 + 2 3 + 1 + 3 – 2 3 + 1 = 8
AC = 2 2
AB a pour coordonnées (1 ; 1) donc AB = 2
AB. AC = 1 (3 + 1) + 1 (1 – 3) = 2 = AB AC cos CAB
donc 2 = 2 2 2 cos CAB donc cos CAB =
1
2
donc une mesure de l'angle CAB est égale à 60°.

5. Affirmation : VRAIE

Evaluons l'angle $\widehat{CAB}$.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(\sqrt{3}+1\ ;\ 1-\sqrt{3})$

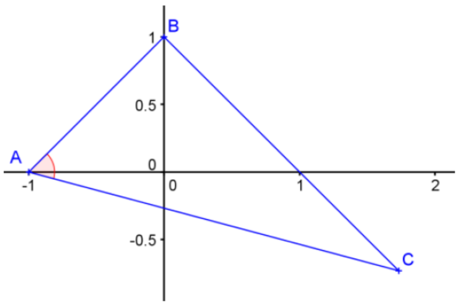
donc $AC^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 8$

$AC = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (1 ; 1) donc $AB = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (\sqrt{3}+1) + 1 \times (1-\sqrt{3}) = 2 = AB \times AC \cos \widehat{CAB}$

donc $2 = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \cos \widehat{CAB}$ donc $\cos \widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}$ donc une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ est égale à 60°.



Exercice 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Affirmation : VRAIE

Si x = 9 et y = 13 alors 3 x – 2 y = 3 9 – 2 23 = 1 donc (3 ; 9) est solution de l'équation (E).

1. Affirmation : VRAIE

Si $x = 9$ et $y = 13$ alors $3x - 2y = 3 \times 9 - 2 \times 23 = 1$ donc (3 ; 9) est solution de l'équation (E).

$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3 \times 9 - 2 \times 13 = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $3(x-9) - 2(y-13) = 0$

$3(x-9) = 2(y-13)$, $x - 9$ est un entier relatif donc 3 divise $2(y-13)$ or 3 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y - 13$ donc $y - 13 = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

En remplaçant dans $3(x-9) = 2(y-13)$ alors $x - 9 = 2k$ donc $x = 2k + 9$ et $y = 3k + 13$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k\ ;\ 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble Z des entiers relatifs.

donc par différence membre à membre : 3 (x – 9) – 2 (y – 13) = 0

3 (x – 9) = 2 (y – 13), x – 9 est un entier relatif donc 3 divise 2 (y – 13) or 3 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise y – 13 donc y – 13 = 3 k (k ℤ)

En remplaçant dans 3 (x – 9) = 2 (y – 13) alors x – 9 = 2 k donc x = 2 k + 9 et y = 3 k + 13 avec k ℤ.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples (9 + 2 k ; 13 +3 k) , avec k appartenant à l'ensemble Z des entiers relatifs.

2. Affirmation : VRAIE

$-2a + 3b = -2(3n+1) + 3(2n+3)$ donc $-2a + 3b = 7$ donc le PGCD de a et b divise 7, donc soit le PGCD de a et b est égal à 1 soit il est égal à 7.
le PGCD de a et b est égal à 7 alors 7 divise a et 7 divise b alors $3n + 1 \equiv 0$ [7] et $2n + 3 \equiv 0$ [7]
donc $2(3n+1) \equiv 0$ [7] et $3(2n+3) \equiv 0$ [7] or $6 = 7 - 1$ donc $6 \equiv -1$ [7] et $9 = 7 + 2$ donc $9 \equiv 2$ [7]
$6n + 2 \equiv -n + 2$ [7] et $6n + 9 \equiv -n + 2$ [7] donc $n \equiv 2$ [7].

<u>Réciproquement :</u> Si n est congru à 2 modulo 7, alors $n = 7k + 2$ donc $a = 3n + 1 = 21k + 7 = 7(3k + 1)$
$b = 2n + 3 = 14k + 7 = 7(2k + 1)$
7 divise a et 7 divise b, or soit le PGCD de a et b est égal à 1 soit il est égal à 7 donc le PGCD de a et b est égal à 7.

Le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

$-2a + 3b = -2(3n+1) + 3(2n+3)$ donc $-2a + 3b = 7$ donc le PGCD de a et b divise 7, donc soit le PGCD de a et b est égal à 1 soit il est égal à 7.
le PGCD de a et b est égal à 7 alors 7 divise a et 7 divise b alors $3n + 1 \equiv 0$ [7] et $2n + 3 \equiv 0$ [7]
donc $2(3n+1) \equiv 0$ [7] et $3(2n+3) \equiv 0$ [7] or $6 = 7 - 1$ donc $6 \equiv -1$ [7] et $9 = 7 + 2$ donc $9 \equiv 2$ [7]
$6n + 2 \equiv -n + 2$ [7] et $6n + 9 \equiv -n + 2$ [7] donc $n \equiv 2$ [7].
Réciproquement : Si n est congru à 2 modulo 7, alors $n = 7k + 2$ donc $a = 3n + 1 = 21k + 7 = 7(3k + 1)$
$b = 2n + 3 = 14k + 7 = 7(2k + 1)$
7 divise a et 7 divise b, or soit le PGCD de a et b est égal à 1 soit il est égal à 7 donc le PGCD de a et b est égal à 7.
Le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Affirmation : FAUSSE

Si $n = 1$, $a = 30$ et $b = 4$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux 7 et à 2
or $n + 17$ 2.

Si $n = 1$, $a = 30$ et $b = 4$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux 7 et à 2
or $n + 17 \neq 2$.

4. Affirmation : VRAIE

1 i
2
=
i
4 1
e
2
, et
1 i 1 7 i
(3 4 i) 3 4 i
2 2
donc A est invariant, donc la similitude directe d'écriture complexe :
z' =
1 i 1 7 i
2 2
z a pour centre A, pour rapport
1
2
et pour angle
4
Elle a donc les mêmes éléments caractéristiques que s – 1 donc la similitude directe réciproque s – 1 a pour écriture complexe :
z' =
1 i 1 7 i
2 2
z

5. Affirmation : VRAIE

la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle (BA , DC) donc arg

$\frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{-\pi}{4}}$, et $\frac{1-i}{2}(3+4i) + \frac{-1+7i}{2} = 3 + 4i$ donc A est invariant, donc la similitude directe d'écriture complexe :

$z' = \frac{1-i}{2} z + \frac{-1+7i}{2}$ a pour centre A, pour rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$

Elle a donc les mêmes éléments caractéristiques que s^{-1} donc la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1-i}{2} z + \frac{-1+7i}{2}$$

$a - b = -3 + 3$ i et $c - d = -3 - 3\ 3 +$ i $(3 - 3\ 3) = -3(1 + 3) + 3$ i $(1 - 3)$.

la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC})$ donc $\arg\left(\dfrac{c-d}{a-b}\right)$

$a - b = -3 + 3\,\mathrm{i}$ et $c - d = -3 - 3\sqrt{3} + \mathrm{i}\,(3 - 3\sqrt{3}) = -3\,(1 + \sqrt{3}) + 3\,\mathrm{i}\,(1 - \sqrt{3})$.

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{-3\,[\,(1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(-1+\sqrt{3})\,]}{-3\,(1-\mathrm{i})} = \frac{[\,(1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(-1+\sqrt{3})\,]\,(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\,(1+\mathrm{i})}$$

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{(1+\sqrt{3}) - (-1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(-1+\sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \text{ donc } \arg\left(\frac{c-d}{a-b}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

La similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\dfrac{\pi}{3}$.

.
La similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle
3
.