L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points : A (2 ; 1 ; – 1), B (– 1 ; 2 ; 4), C (0 ; – 2 ; 3), D (1 ; 1 ; – 2) et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. Les points A, B, C définissent un plan.
2. La droite (AC) est contenue dans le plan P.
3. Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$, t appartient à $\mathbb{R}$.
4. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
5. Le point $E\left(-\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan P.
6. La sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P.

CORRECTION

1. VRAI

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 1 ; 5),

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 2 ; – 3 ; 4),

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

2. FAUX

$x_A - 2y_A + z_A + 1 = 2 - 2 - 1 + 1$ donc $x_A - 2y_A + z_A + 1 = 0$

$A \in P$

$x_C - 2y_C + z_C + 1 = 0 + 4 + 3 + 1$ donc $x_C - 2y_C + z_C + 1 \neq 0$, $C \notin P$ donc la droite (AC) n'est pas contenue dans le plan P.

3. VRAI

Le point de paramètre $t = 1$ de la droite Δ est le point de coordonnées (2 ; 1 ; – 1) donc $A \in \Delta$.

le point de paramètre $t = 0$ de la droite Δ est le point de coordonnées (0 ; – 2 ; 3), donc $C \in \Delta$ donc Δ est la droite (AC) et une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$, t appartient à $\mathbb{R}$.

4. FAUX

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 1 ; 5), $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées (1 ; 3 ; – 5).

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} = -3 \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-5) = -25$ donc $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} \neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

5. VRAI

$x_E - 2y_E + z_E + 1 = -\frac{4}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + 1 = 0$ donc $E \in P$

Un vecteur normal à P est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; – 2, 1)

$\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3} ; -2 - \frac{2}{3} ; 3 - \frac{5}{3}\right)$ soit $\left(\frac{4}{3} ; -\frac{8}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{EC} = \frac{4}{3}\vec{n}$ donc (EC) est la perpendiculaire en C à au plan P donc le point $E\left(-\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan P.

6. VRAI

La distance de D au plan P est égale à $d = \frac{|x_D - 2y_D + z_D + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{|1 - 2 - 2 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La distance du centre de la sphère D au plan P est égale au rayon de la sphère donc la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P.