Liban mai 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

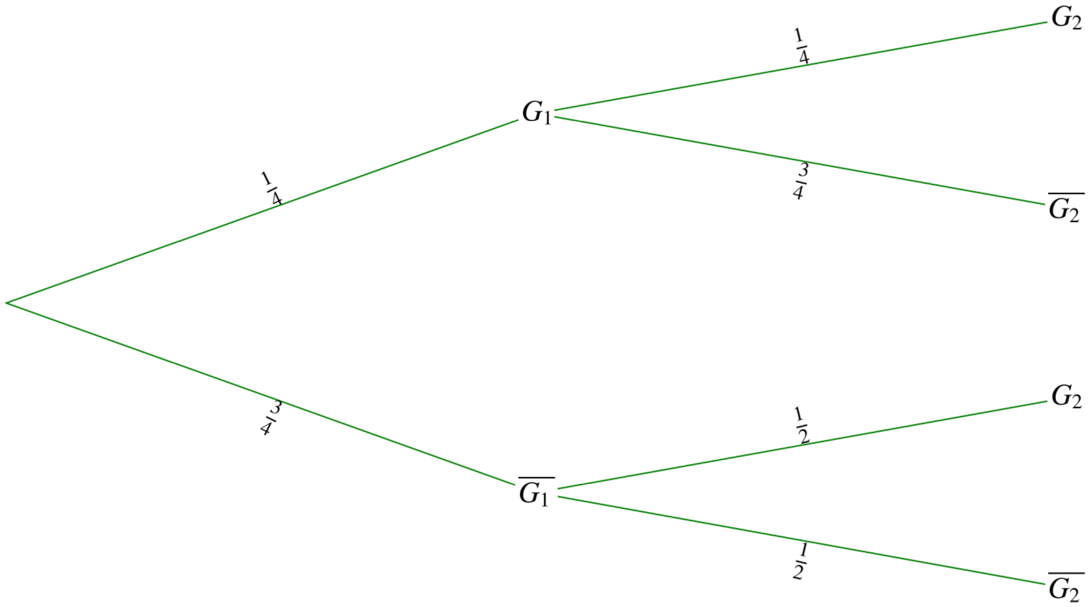
4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

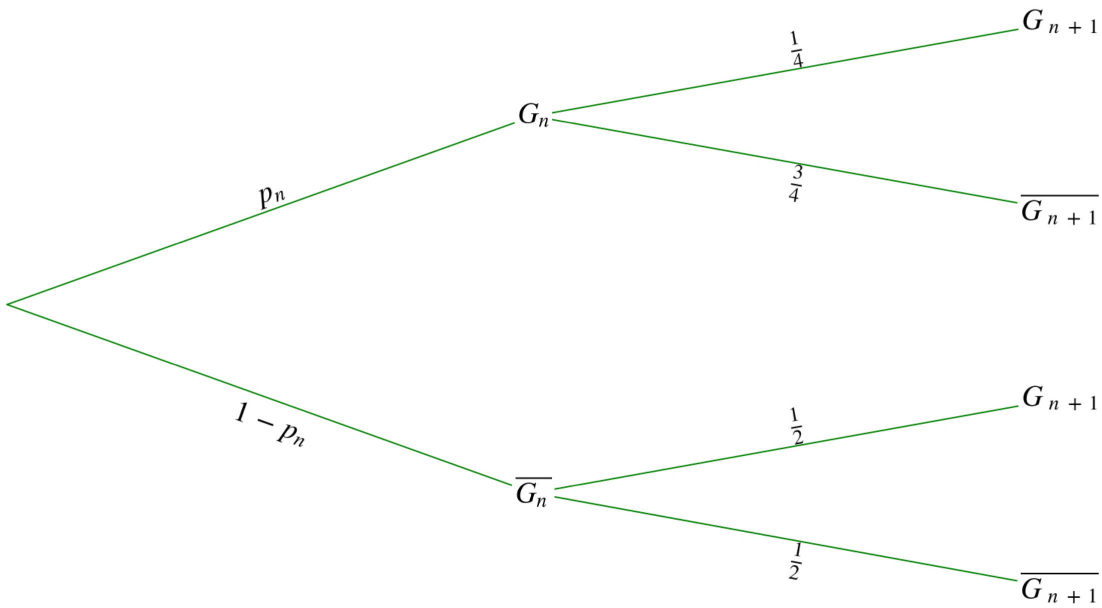
CORRECTION



1. $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$

$p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n$ donc $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.



3. D'après les premières valeurs de p_n, on peut supposer que (p_n) converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc $p_n = u_n + \frac{2}{5}$ or $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$ donc en remplaçant : $u_{n+1} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}$

soit $u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$ donc $u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5}$ soit $u_1 = -\frac{3}{20}$ donc $u_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

b. $p_n = u_n + \frac{2}{5}$ et $u_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ donc pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}$. Sur un grand nombre de parties, la probabilité qu'un joueur gagne une partie est 0,4.