Les quatre questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = 4 - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t', \quad t' \in \mathbb{R}. \\ z = 6 + t' \end{cases}$

Affirmation : les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(12 ; 7 ; – 13) et B(3 ; 1 ; 2) ainsi que le plan P d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan P.

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ et $v_n = 2 + \dfrac{1}{n+2}$

Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + 2$, pour tout entier naturel n.

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

CORRECTION

1. **Affirmation : VRAIE**

La droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1 ; 2 ; -1)$

La droite D_2 a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(5 ; -2 ; 1)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles

Cherchons si D_1 et D_2 sont sécantes donc cherchons si le système en t et t' admet une solution.

$$\begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \\ 4 - t = 6 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \\ 4 - t = 6 + t' \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 4 & L_1 \\ t + t' = -2 & L_2 \\ 2t + 2t' = -4 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' = -6 & L_2 - L_1 \\ t + t' = -2 & L_2 \\ t + t' = -2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t + t' = -2 \\ t + t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t - 1 = -2 \\ t + t' = -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \\ t = -1 \\ t + t' = -2 \end{cases}$. La relation $t + t' = -2$ est vérifiée quand $t = t' = -1$ donc les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes donc les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

2. **Affirmation : VRAIE**

$\vec{n}\,(3 ; 2 ; -5)$ est un vecteur normal au plan P. $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées (9 ; 6 ; – 15) donc $\overrightarrow{BA} = 3\,\vec{n}$

La droite (AB) est orthogonale au plan P.

$3x_B + 2y_B - 5z_B = 3 \times 3 + 2 - 5 \times 2 = 1$ donc $B \in P$ donc le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan P .

3. **Affirmation : FAUSSE**

$u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$ donc $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{1}{n+3} - \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite u est croissante.

$v_n = 2 + \dfrac{1}{n+2}$ donc $v_{n+1} - v_n = 2 + \dfrac{1}{n+3} - \left(2 + \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{(n+2)(n+3)}$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$

La suite v est décroissante.

$v_n - u_n = 2 + \dfrac{1}{n+2} - \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n \neq 0$, ces deux suites ne sont pas adjacentes.

4. **Affirmation : VRAIE**

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.
Vérification : $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$
Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire :
c'est-à-dire que si $u_n \leq 3$ alors $u_{n+1} \leq 3$

$u_n \leq 3$ donc $\frac{1}{3} u_n + 2 \leq \frac{1}{3} \times 3 + 2$ soit $u_{n+1} \leq 3$

pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Conclusion : (u_n) est une suite majorée par 3.