1. Calculs vectoriels dans l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k (éventuellement nul) tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Propriétés

Soit A et B deux points distincts et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Soit A, B, C et **D** quatre points distincts, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Soit A, B et C trois points distincts, les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Soit O un point quelconque et les points A, B et C définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si O, A, B et C sont coplanaires.

Propriété Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

Soit A, B, C et **D** quatre points de l'espace. Ces quatre points sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Un plan est caractérisé par un point et par deux vecteurs non colinéaires : **P** $= (A\,;\,\vec{u}, \vec{v})$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A et B deux points de l'espace.

Les plans $(A\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ et $(B\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ sont parallèles.

Théorème : Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base de l'espace**.

Considérons l'unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Les trois réels x, y et z sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On dit que $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère de l'espace** si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires donc si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base.

Soit $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

Les trois réels x, y et z sont les **coordonnées de M** dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **(x abscisse, y : ordonnée et z : côte).**

Définition : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires.

On dit que $\begin{cases} x = x_A + \lambda\, a + \mu\, a' \\ y = y_A + \lambda\, b + \mu\, b', \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \\ z = z_A + \lambda\, c + \mu\, c' \end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan $(A\,;\vec{u}, \vec{v})$)

Le système S $\begin{cases} x = x_A + k\,a \\ y = y_A + k\,b,\ k \in \mathbb{R} \\ z = z_A + k\,c \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de la droite **D** (on dit aussi que S est une représentation paramétrique de la droite **D** passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$).

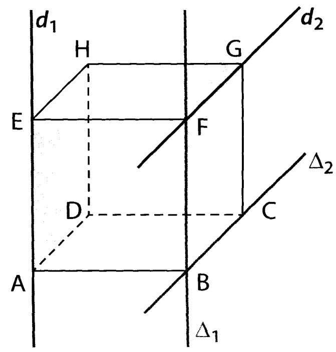
3. Orthogonalité

Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes mais deux droites perpendiculaires sont sécantes.
Deux vecteurs sont orthogonaux (on ne dit pas perpendiculaires) lorsque leurs directions respectives sont orthogonales.
Dire qu'une droite est orthogonale ou perpendiculaire à un plan signifie la même chose.
Un vecteur non nul $\vec{n}$ normal à un plan **P** est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à **P**.
Conséquence : Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan **P**, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points du plan.

Propriétés : Si deux droites sont orthogonales alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

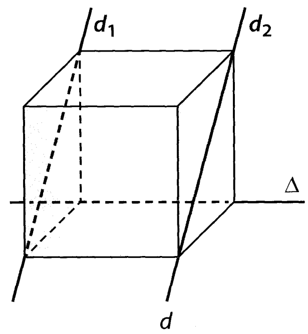
Théorème : Si une droite **D** est orthogonale à deux droites sécantes du plan **P** alors elle est orthogonale à **P**.

Définition
Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si il existe un point I tel que les parallèles à ces droites passant par I sont perpendiculaires.
On écrit $d_1 \perp d_2$

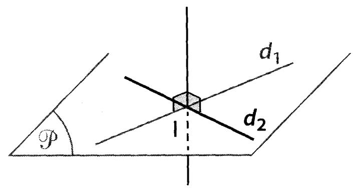


Propriété Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

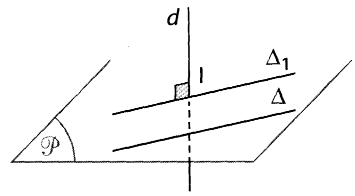
$$\begin{cases} d \,//\, d_1 \\ d_1 \perp d_2 \end{cases} \Rightarrow d \perp d_2 .$$



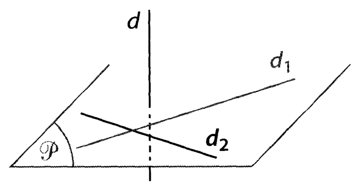
Définition
I est l'intersection d'une droite d et d'un plan **P**.
La droite d et le plan **P** sont perpendiculaires si et seulement si d est perpendiculaire à deux droites d_1 et d_2 de **P** passant par I.



Propriété Si une droite d est perpendiculaire à un plan **P**, alors d est orthogonale à toute droite Δ contenue dans **P**.



Propriété Si d soit orthogonale à deux droites sécantes d'un plan **P** alors la droite d et le plan **P** sont perpendiculaires.



Si deux droites sont orthogonales à un même plan, elles sont parallèles. Si $\begin{cases} D \perp P \\ \Delta \perp P \end{cases}$ alors **D** // Δ

Si deux droites sont parallèles et si l'une est orthogonale à un plan, l'autre aussi. Si $\begin{cases} D \,//\, \Delta \\ \Delta \perp P \end{cases}$ alors $D \perp P$

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, ils sont parallèles. Si $\begin{cases} \Delta \perp P \\ \Delta \perp P' \end{cases}$ alors **P** // **P**'

Propriétés :
Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
Si une droite **D** est orthogonale à une droite **D**' et est perpendiculaire à un plan **P** alors **D**' et **P** sont parallèles.

4. Produit scalaire dans l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition : La droite **D** étant la droite orthogonale au plan **P** passant par M et coupant **P** en M', le point M' est alors appelé projeté orthogonal de M sur **P**.
Le plan **P** étant le plan orthogonal à la droite **D** passant par M et coupant **D** en M', le point M' est alors appelé projeté orthogonal de M sur **D**.

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On a $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Propriétés :

Avec une projection orthogonale : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Avec cosinus et angle : (si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls) $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$

Avec la norme uniquement

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\ \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|\ \right]$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\ \|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\ \right]$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\ \|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|\ \right]$$

Expression analytique dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

Cas particuliers

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires de même sens** donc $\widehat{BAC} = 0$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires de sens opposés** donc $\widehat{BAC} = \pi$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors $\widehat{BAC}$ est droit donc $\cos \widehat{BAC} = 0$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Conséquences : Deux droites **D** et **D** ' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan **P**, si A est un point de **P**, **P** est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Toutes les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace :

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k\,(\vec{u}.\vec{v})$ pour tout réel k.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|$

Propriété : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété : On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Pour tout M $(x ; y ; z)$ de l'espace, on a $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
Dans un repère orthonormé, pour tout vecteur $\vec{u}\,(x ; y ; z)$ et tous points $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$ de l'espace :

- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$

Propriété

Tout plan **P** de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme : $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$

Réciproquement, si $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$, l'ensemble des points M $(x ; y ; z)$ tels que : $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

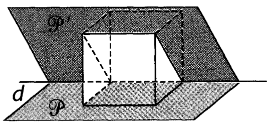
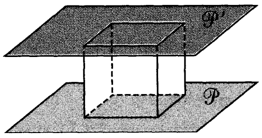
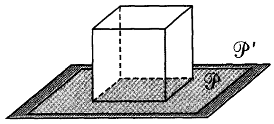
4. Intersection de deux plans

***a.* Positions relatives de deux plans**

Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

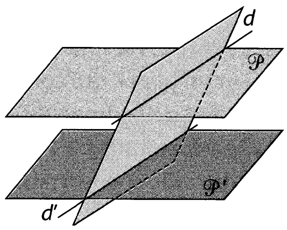
Soit **P** : $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, **P** ' : $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$ et

S le système $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z = d' \end{cases}$.

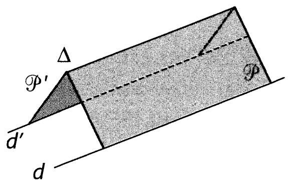
Sécants	**Parallèles**	
Les listes (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') ne sont pas proportionnelles	Les listes (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') sont proportionnelles	
		
P et **P** ' ont une droite d'intersection *d*. **P** $\cap$ **P** ' = d $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires	**P** et **P** ' sont strictement parallèles, **P** $\cap$ **P** ' = Ø $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires	**P** et **P** ' sont confondus. **P** = **P** ' $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
Le système S caractérise la droite *d*.	Le système S n'*a* pas de solution	Le système S caractérise le plan **P**

Deux plans sont sécants lorsqu'ils ne sont pas parallèles.

Si deux plans **P** et **P** ' sont parallèles, alors tout plan qui coupe **P** , coupe aussi **P** ' et les droites d'intersection d et d' sont parallèles.

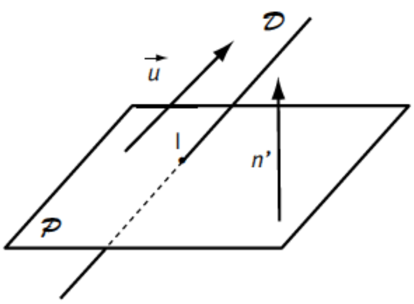
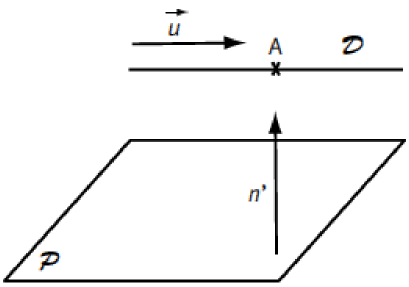
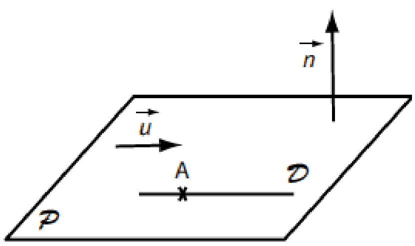


Théorème du toit : Si deux plans **P** et **P** ' sont sécants selon une droite Δ et si d et d' sont deux droites parallèles contenues respectivement dans **P** et **P** ', alors la droite Δ est parallèle à d et d'.



Dans l'espace, toute droite est caractérisée par un système d'équations cartésiennes $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z = d' \end{cases}$

***b* Positions relatives d'une droite et d'un plan**

Sécants	**Parallèles**	
		
D et **P** ont un point d'intersection I. **P** $\cap$ **P** ' = { I } $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux	**P** et **D** sont strictement parallèles, **P** $\cap$ **D** = Ø $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux	**D** est contenue dans **P** **P** $\cap$ **D** = **D** $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux