Nouvelle Calédonie mars 2011

EXERCICE 1 6 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\,e^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle : $10\,v'(t) + v(t) = 30$.

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. *a*. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

***b*.** Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0{,}1\,\mathrm{m}.s^{-2}$.

Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

EXERCICE 2 4 points

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

EXERCICE 3 5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$. En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0\,;1]$.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

EXERCICE 4 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2 ; 0 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; -1)$ et $C(-2 ; 2 ; 2)$.

1. *a.* Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3. Soient P_1, et P_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite D et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit S la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S .

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite D.

c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

CORRECTION

EXERCICE 1

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. u est une constante donc sa dérivée est nulle or $a\,u + b = 0$ donc u est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y + b$

2. $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow (f - u)' = a\,(f - u) \Leftrightarrow f' - u' = a\,f - a\,u \Leftrightarrow f' = a\,f + u' - a\,u$

u solution de (E) $\Leftrightarrow u' = a\,u + b \Leftrightarrow u' - a\,u = b$

$f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow f' = a\,f + u' - a\,u \Leftrightarrow f' = a\,f + b \Leftrightarrow f$ est solution de (E)

3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow f - u$ solution de l'équation différentielle $y' = a\,y \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $(f - u)\,x = K\,\mathrm{e}^{a\,x}$

f est solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) = K\,\mathrm{e}^{a\,x} + u(x) \Leftrightarrow f(x) = K\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$

les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Partie B

1. v est solution de l'équation différentielle : $10\,v'(t) + v(t) = 30$ soit de $v'(t) = -\dfrac{1}{10}v(t) + 3$

d'après la partie A, v est la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = K\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30$ où $K \in \mathbb{R}$.

$v(0) = 0$ donc K + 30 = 0 soit K = – 30 donc $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. *a.* $v'(t) = 3\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}$ or la fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $v'(t) > 0$, la fonction v est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 30$.

3. $v'(t) = 3\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}$, $v'(t) < 0{,}1 \Leftrightarrow 3\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} < 0{,}1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} < \dfrac{1}{30} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{10}t < \ln\left(\dfrac{1}{30}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{10}t < -\ln 30 \Leftrightarrow t > 10 \ln 30$

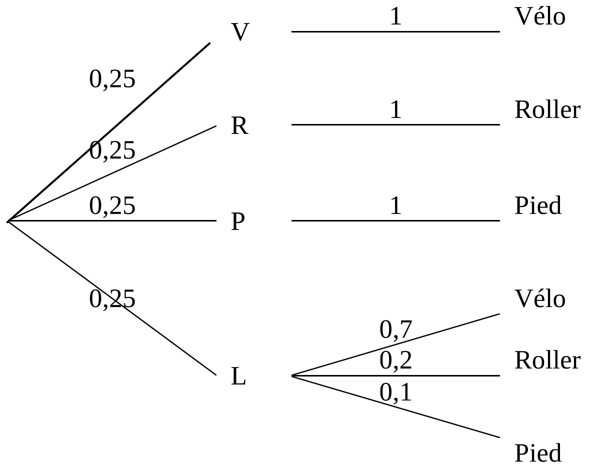
$10 \ln 30 \approx 35$ *s*

4. la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes est $d = \displaystyle\int_0^{35} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Une primitive de $v(t)$ est $30\left(t + 10\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$ donc $d = 30\left(35 + 10\,\mathrm{e}^{-\frac{35}{10}}\right) - 30 \times 10 = 750 + 300\,\mathrm{e}^{-3{,}5}$ soit approximativement 759,1 *m*

EXERCICE 2

1.



2. Un concurrent fait le trajet en vélo s'il a tiré le jeton V (p = 0,25) ou s'il a tiré le jeton L (p = 0,25) et qu'il a choisi de faire le trajet en vélo (p = 0,7) donc p(Vélo) = 0,25 + 0,25 × 0,7 = 0,2

3. $p_{\text{V}}(\text{L}) = \dfrac{p(\text{V} \cap \text{L})}{p(\text{V})} = \dfrac{0,25 \times 0,7}{0,2} = 0,875$

4. On a une succession de 6 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles *a* deux issues :

- succès : le vainqueur n'a pas effectué le trajet à vélo ($p = 1 - \dfrac{2}{3}$)
- échec : le vainqueur a effectué le trajet à vélo ($q = \dfrac{2}{3}$).

donc la variable aléatoire comptant le nombre de fois où le vainqueur est un concurrent « non cycliste » suit une loi binomiale de paramètres $(6 ; \dfrac{1}{3})$

$p(\text{X} \geq 1) = 1 - p(\text{X} = 0) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \approx 0,912$

EXERCICE 3

Partie A

1. $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

2. $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1$ et $f'(1) = 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle [0 ; 1].

si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2$ donc $f(1) < 1$ donc pour tout x de [0 ; 1], $0 \leq f(x) \leq f(1)$
donc si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \in [0 ; 1]$.
$u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0 ; 1]$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_n \in [0 ; 1]$ alors $u_{n+1} \in [0 ; 1]$.

$u_n \in [0 ; 1]$ donc d'après la question a 2, $f(u_n) \in [0 ; 1]$, soit $u_{n+1} \in [0 ; 1]$.
La propriété est héréditaire donc est vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ or $u_n^2 + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante.

3. la suite (u_n) est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

$u_{n+1} = f(u_n)$, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (u_n) converge donc sa limite ℓ est solution de $f(x) = x$,

d'après la question A. 1. $\ell = 0$.

EXERCICE 4

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 2; – 2) $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$

$AB^2 = 3^2 + 2^2 + (-2)^2 = 17$ et $AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ donc $AB = \sqrt{17}$ et $AC = \sqrt{5}$

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$ donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{\sqrt{85}}$

une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$ est 77°.

c. L'angle $\widehat{BAC}$ n'étant ni nul, ni plat, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Les coordonnées (− 2 ; 0 ; 1) du point A vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $-4 - 0 + 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;
Les coordonnées (1 ; 2 ; − 1) du point B vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $2 - 2 - 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;
Les coordonnées (−2 ; 2 ; 2) du point C vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $-4 - 2 + 4 + 2 = 0$ égalité vraie.
Les coordonnées des trois points non alignés A, B et C vérifient l'équation : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
cette équation est donc l'une des équations du plan (ABC).

3. Soient P_1, et P_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ (1 ; 1 ; − 3) ; P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ (1 ; − 2 ; 6).
$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles et distincts : ils sont donc sécants suivant une droite D dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$. soit en posant $z = t$: $\begin{cases} L_1 : x + y = 3t - 3 \\ L_2 : x - 2y = -6t. \\ L_3 : z = t \end{cases}$

$$\begin{cases} L_1 : x + y = 3t + 3 \\ L_1 - L_2 : 3y = 9t - 3 \\ L_3 : z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 : x + y = 3t + 3 \\ L_2 : y = 3t - 1 \\ L_3 : z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 : x + 3t - 1 = 3t + 3 \\ L_2 : y = 3t - 1 \\ L_3 : z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. D a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; 3 ; 1) et le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}$ (2 ; −1 ; 2).
$\vec{u} . \vec{n} = -3 + 2 = -1$ donc $\vec{u} . \vec{n} \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc la droite D n'est pas parallèle au plan (ABC).
Le point commun est tel que $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ et $2x - y + 2z + 2 = 0$ donc $-4 - 3t + 1 + 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$
Le point commun à D et au plan (ABC) a pour coordonnées (− 2 ; − 4 ; − 1).

5. *a.* $M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$
une équation cartésienne de la sphère S est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$

b. Le point commun est tel que $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (-2)^2 + (3t-1)^2 + t^2 - 2 \times (-2) + 6(3t-1) - 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 + 9t^2 + 1 - 6t + t^2 + 4 + 18t - 6 - 2t + 2 = 0$
$\Leftrightarrow 10t^2 + 10t + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0$.
On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: il n'*y a* pas de solution : conclusion la droite D ne coupe pas la sphère.

c. La distance de Ω au plan (ABC) est $d = \dfrac{|2 \times 1 - 1 \times (-3) + 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$
la distance du point Ω au plan (ABC) est égal au rayon de la sphère, donc le plan (ABC) est tangent à la sphère S.