

## Antilles Guyane juin 2017

On considère la suite définie par son premier terme  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_{n+1} = 2u_n + 6$ .

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 9 \times 2^n - 6$ .
- Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n$  est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers  $(v_n)$  par, pour tout entier naturel  $n > 1$ ,  $v_n = \frac{u_n}{6}$ .

- On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_n$  est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
- Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} - 2v_n = 1$ .
  - En déduire que, pour tout entier  $n > 1$ ,  $v_n$  et  $v_{n+1}$  sont premiers entre eux.
  - En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$ , le PGCD de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .
- Vérifier que  $2^4 \equiv 1 [5]$ .
  - En déduire que si  $n$  est de la forme  $4k + 2$  avec  $k$  entier naturel, alors  $u_n$  est divisible par 5.
  - Le nombre  $u_n$  est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel  $n$  ? Justifier.

## Asie juin 2017

Les deux parties sont indépendantes

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

### Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :

- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité  $p$  ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité  $1 - p$ .

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.

Après avoir traversé  $n$  lignes de transmission, on note :

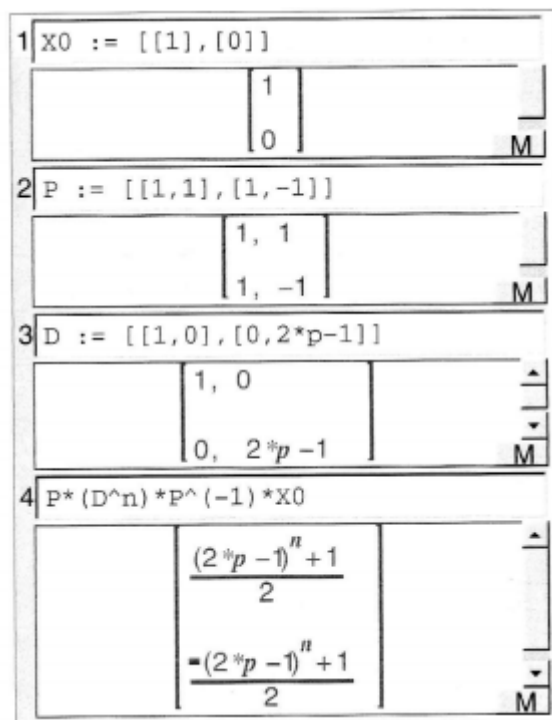
- $p_n$  la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- $q_n$  la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc  $p_0 = 1$  et  $q_0 = 0$ . On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier  $n$ , on a :  $X_{n+1} = A X_n$  et donc,  $X_n = A^n X_0$

- Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
- On pose :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$ . Vérifier que :  $A = P D P^{-1}$ .
- Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $A^n = P D^n P^{-1}$ .
- En vous appuyant sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-contre, déterminer l'expression de  $q_n$  en fonction de  $n$ .



### Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)

On rappelle qu'un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note  $b_1, b_2, b_3$  et  $b_4$ .

Par exemple, pour le mot « 1101 », on a  $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$  et  $b_4 = 1$ .

On ajoute à cette liste une clé de contrôle  $c_1 c_2 c_3$  formée de trois bits :

- $c_1$  est le reste de la division euclidienne de  $b_2 + b_3 + b_4$  par 2 ;
- $c_2$  est le reste de la division euclidienne de  $b_1 + b_3 + b_4$  par 2 ;
- $c_3$  est le reste de la division euclidienne de  $b_1 + b_2 + b_4$  par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

#### 1. Préliminaires

- Justifier que  $c_1, c_2$  et  $c_3$  ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
  - Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.
- Soit  $b_1 b_2 b_3 b_4$  un mot de 4 bits et  $c_1 c_2 c_3$  la clé associée. Démontrer que si on change la valeur de  $b_1$  et que l'on recalcule la clé, alors :
    - la valeur de  $c_1$  est inchangée ;
    - la valeur de  $c_2$  est modifiée ;
    - la valeur de  $c_3$  est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.

Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculé \ Bit erroné	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	Aucun
$c_1$	J							
$c_2$	F							
$c_3$	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits : A = 0100010 et B = 1101001.

On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission. Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

### Centres étrangers juin 2017

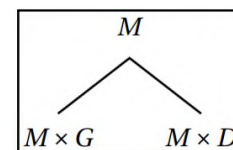
L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

On considère les deux matrices  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

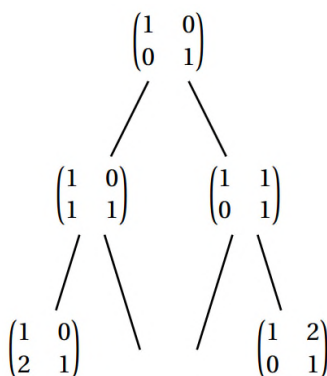
On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante :

de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices  $M \times G$  (à gauche) et  $M \times D$  (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres  $a, b, c, d$  sont des entiers vérifiant :  $b + d \neq 0$ .

2. On associe à une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  de l'arbre de Stern-Brocot la fraction  $\frac{a+c}{b+d}$ .

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction  $\frac{3}{5}$ .

3. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  une matrice de l'arbre. On rappelle que  $a, b, c, d$  sont des entiers.

On note  $\Delta_M = a d - b c$ , la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si  $a d - b c = 1$ , alors  $d(a+c) - c(b+d) = 1$ .

b. En déduire que si  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que  $\Delta_M = a d - b c = 1$ , alors  $\Delta_{M \times G} = 1$ , c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice  $M \times G$  est aussi égale à 1.

On admet de même que  $\Delta_{M \times D} = 1$ , et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité  $\Delta_N = 1$ .

4. Déduire de la question précédente que toute fraction  $\frac{m}{n}$  associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction  $\frac{m}{n}$  est irréductible. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :  $m$  et  $n$  sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux  
 TRAITEMENT : Tant que  $m \neq n$ , faire  
                   Si  $m < n$

Afficher « Gauche » $n$ prend la valeur $n - m$ Sinon Afficher « Droite » $m$ prend la valeur $m - n$
---

a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs  $m = 4$  et  $n = 7$ .

Affichage		Gauche	...	...	...
$m$	4	...	...	...	...
$n$	7	...	...	...	...

b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs  $m = 4$  et  $n = 7$ .

### Liban juin 2017

Un numéro de carte bancaire est de la forme :  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$  où  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  et  $c$  sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

$c$  est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation :	I prend la valeur 0 P prend la valeur 0 R prend la valeur 0
Traitement :	Pour $k$ allant de 0 à 7 :   R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2 a_{2k+1}$ par 9   I prend la valeur I + R Fin Pour Pour $k$ allant de 1 à 7 :   P prend la valeur P + $a_{2k}$ Fin Pour S prend la valeur I + P + $c$
Sortie :	Si S est un multiple de 10 alors :   Afficher « Le numéro de la carte est correct. » Sinon :   Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. » Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

b. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.

Quel doit être le deuxième chiffre  $a$  pour que le numéro de carte obtenu  $6a35 4002 9561 3411$  reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.

Montrer qu'il existe une clé  $c$  rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

### Métropole juin 2017

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs  $x$  et  $x + 1$ , et dont l'hypoténuse a pour longueur  $y$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.

Si le triangle de côtés  $x, x + 1$  et  $y$ , où  $y$  est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPJ, on dira que le couple  $(x ; y)$  définit un TRPI.

#### Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels  $(x ; y)$  définit un TRPI si, et seulement si, on a :  $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple  $(3 ; 5)$ .

3. a. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que si  $n^2$  est impair alors  $n$  est impair.

b. Montrer que dans un couple d'entiers  $(x ; y)$  définissant un TRPI, le nombre  $y$  est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels  $(x ; y)$  définit un TRPI, alors  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux.

#### Partie B

On note A la matrice carrée :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , et B la matrice colonne :  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels  $x'$  et  $y'$  par la relation :  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ .

1. Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- a. Montrer que :  $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$ .
- b. En déduire que si le couple  $(x; y)$  définit un TRPI, alors le couple  $(x'; y')$  définit également un TRPI.
2. On considère les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers naturels, définies par  $x_0 = 3, y_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B.$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n; y_n)$  définit un TRPI.

3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

### Polynésie juin 2017

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

— À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier  $n$  comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

— On choisit deux entiers  $a$  et  $b$  compris entre 0 et 25.

— Tout nombre entier  $n$  compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de  $an + b$  par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences  $f$  en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,33	3,23

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

### Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9 % de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres  $a$  et  $b$  qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?
2. Montrer que les entiers  $a$  et  $b$  sont solutions du système  $\begin{cases} 4a + b \equiv 14 \pmod{26} \\ b \equiv 4 \pmod{26} \end{cases}$
3. Déterminer tous les couples d'entiers  $(a, b)$  ayant pu permettre le codage de ce texte.

### Partie B

1. On choisit  $a = 22$  et  $b = 4$ .

- a. Coder les lettres K et X.
- b. Ce codage est-il envisageable ?

2. On choisit  $a = 9$  et  $b = 4$ .

- a. Montrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , on a :  $m \equiv 9n + 4 \pmod{26} \Leftrightarrow n \equiv 3m + 14 \pmod{26}$
- b. Décoder le mot AQ.

### Pondichéry avril 2017

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par :

$u_0 = v_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$  et  $v_{n+1} = 2u_n + v_n$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

### Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang $n$	terme $u_n$	terme $v_n$
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

- Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
- Soit  $n$  un entier naturel.  
Conjecturer la valeur de PGCD  $(u_n ; v_n)$ . Aucune justification n'est demandée.
- Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1258291	838861
13	11	5033165	3355443
14	12	20132659	13421773
15	13	80530637	53687091

Elle émet la conjecture : « la suite  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  converge ». Qu'en penser ?

### Partie B : Étude arithmétique

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $2 u_n - 3 v_n = (-1)^{n+1}$
- Soit  $n$  un entier naturel.  
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD  $(u_n ; v_n)$ .

### Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit :

- la matrice colonne  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ,
- les matrices carrées  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$

1. a. Montrer que la matrice  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est l'inverse de  $P$ .

b. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $X_n = Q_n P^{-1} X_0$ .

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a 
$$\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a 
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$$

b. En déduire la limite de la suite  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .