Soit n un entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n}x^3 + 3x - 2$

1. *a.* Etudier les variations de f_n .
b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n et que $0 < \alpha_n < 1$
c. En déduire le signe de $f_n(x)$
2. *a.* Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
b. En déduire le sens de variation de (α_n).

CORRECTION

1. *a.* $f'_n(x) = \frac{3}{n}x^2 + 3$,

$n > 0$, $x^2 \geq 0$ donc $\frac{3}{n}x^2 \geq 0$ et $\frac{3}{n}x^2 + 3 \geq 3 > 0$ donc $f'_n(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f_n est un polynôme donc a la même limite à l'infini que son terme de plus haut degré donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{n}x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n}x^3 = +\infty$.

b. La fonction f_n est définie continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{n}x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n}x^3 = +\infty$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n. $f_n(0) = -2$ donc $0 < \alpha_n$

$f_n(1) = \frac{1}{n} + 1$ donc $f_n(1) > 0$ donc $\alpha_n < 1$ donc $0 < \alpha_n < 1$.

x	$-\infty$	0	α_n	1	$+\infty$
$f'_n(x)$			$+$		
f_n	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{n}+1$	$+\infty$

c. f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $f_n(\alpha_n) = 0$ donc

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f_n(x)$		$-$	0	$+$	

2. *a.* L'équation $f_{n+1}(x) = 0$ admet une unique solution α_{n+1} donc $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $\frac{1}{n+1}\alpha^3_{n+1} + 3\alpha_{n+1} - 2 = 0$

donc $3\alpha_{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}\alpha^3_{n+1}$

$f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n}\alpha^3_{n+1} + 3\alpha_{n+1} - 2$

En remplaçant $3\alpha_{n+1} - 2$ par $-\frac{1}{n+1}\alpha^3_{n+1}$ on obtient :

$f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n}\alpha^3_{n+1} - \frac{1}{n+1}\alpha^3_{n+1}$

$f_n(\alpha_{n+1}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\alpha^3_{n+1}$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n(n+1)}\alpha^3_{n+1}$

$0 < \alpha_{n+1} < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

b. $f_n(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha_n$ donc puisque $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ alors $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
La suite (α_n) est croissante majorée par 1 donc est convergente.