Métropole La Réunion septembre 2017

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M′ est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation : $-z^2 + 2z - 2 = 0$.

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M′ son image d'affixe z'. On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.

Montrer que M est le milieu du segment [NM′].

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle C de centre O et de rayon 1.

On note θ un argument de z.

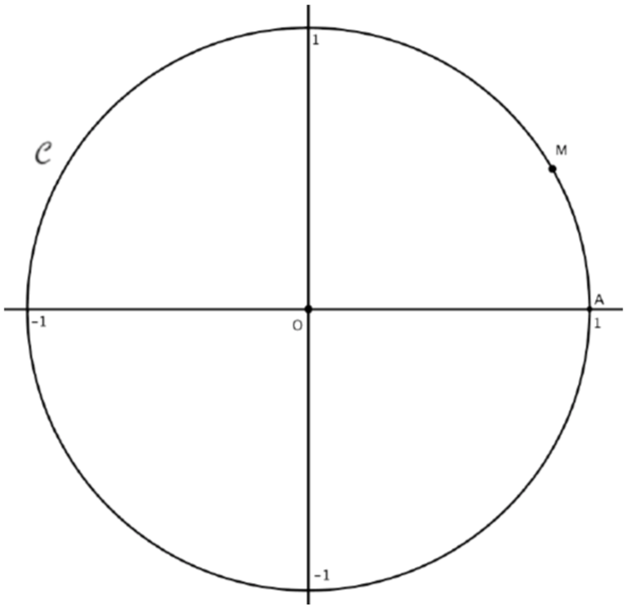
a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

b. Sur la figure donnée en annexe, on a représenté un point M sur le cercle C.

Construire sur cette figure les points N et M′ en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM′ ?

Cette annexe est à rendre avec la copie



CORRECTION

1. $-z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 - i^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = 1 + i$ ou $z = 1 - i$.

Les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2 sont solutions de

$-z^2 + 2z = 2$ soit de $-z^2 + 2z - 2 = 0$ donc sont égales à $1 + i$ ou à $1 - i$.

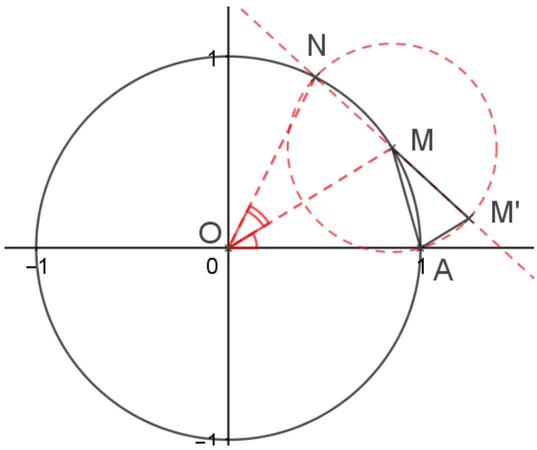
2. Le milieu de [NM'] a pour affixe $\dfrac{-z^2 + 2z + z^2}{2} = z$ donc M est le milieu du segment [NM′].

3. *a.* Le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle C de centre O et de rayon 1 donc OM = 1 soit $|z| = 1$

$|z_N| = |z|^2 = 1$ et $\arg z_N = \arg z^2$ soit $\arg z_N = 2 \arg z$ soit $\arg z_N = 2\,\theta$.

b. Pour construire le point N, traçons le cercle de centre M passant par A, il coupe le cercle C en N.

M est le milieu du segment [NM′] donc M' est le symétrique de N par rapport à M.



c. AM = MN = MM' donc le triangle AMM′ est isocèle en M