EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$; unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 2 + \mathrm{i}$ et le cercle (Γ) de centre A de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. *a*. Déterminer les affixes des points intersection de (Γ) et de l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{u})$.

2. *b*. On désigne par B et C les points d'affixes respectives : $z_{\mathrm{B}} = 1$ et $z_{\mathrm{C}} = 3$.

Déterminer l'affixe z_{D} du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}$.

a. Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{M}}}$.

b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{M}}}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ ') le cercle de diamètre [AB].La droite (BM) recoupe le cercle (Γ ') en un point N.

a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b. Déterminer l'affixe du point N.

B. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'affixe du point M'.

b. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ ').

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IA}^2$.

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$

PARTIE B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

A(3 ; 0 ; 0) , B(0 ; 6 ; 0) , C (0 ; 0 ; 4) et D(– 5 ; 0 ; 1).

1. *a*. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(4\,;2\,;3)$ est normal au plan (ABC).

1. *b*. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. *a*. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

2. *b*. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

2. *c*. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

2. *d*. Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie A.

EXERCICE 2 (5 points) spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (x O y).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; – 3) et (– 1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (x O y).

4. *a*. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

4. *b*. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm $(a\,;b) = 440$, c'est-à-dire tels que $(a\,;b)$ soit solution du système (1) : $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \mathrm{ppcm}(a\,;b)=440 \end{cases}$.

Montrer que si $(a\,;b)$ est solution de (1) alors pgcd $(a\,;b)$ est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; + ∞ [par : $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et + ∞ .

2. *a.* Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

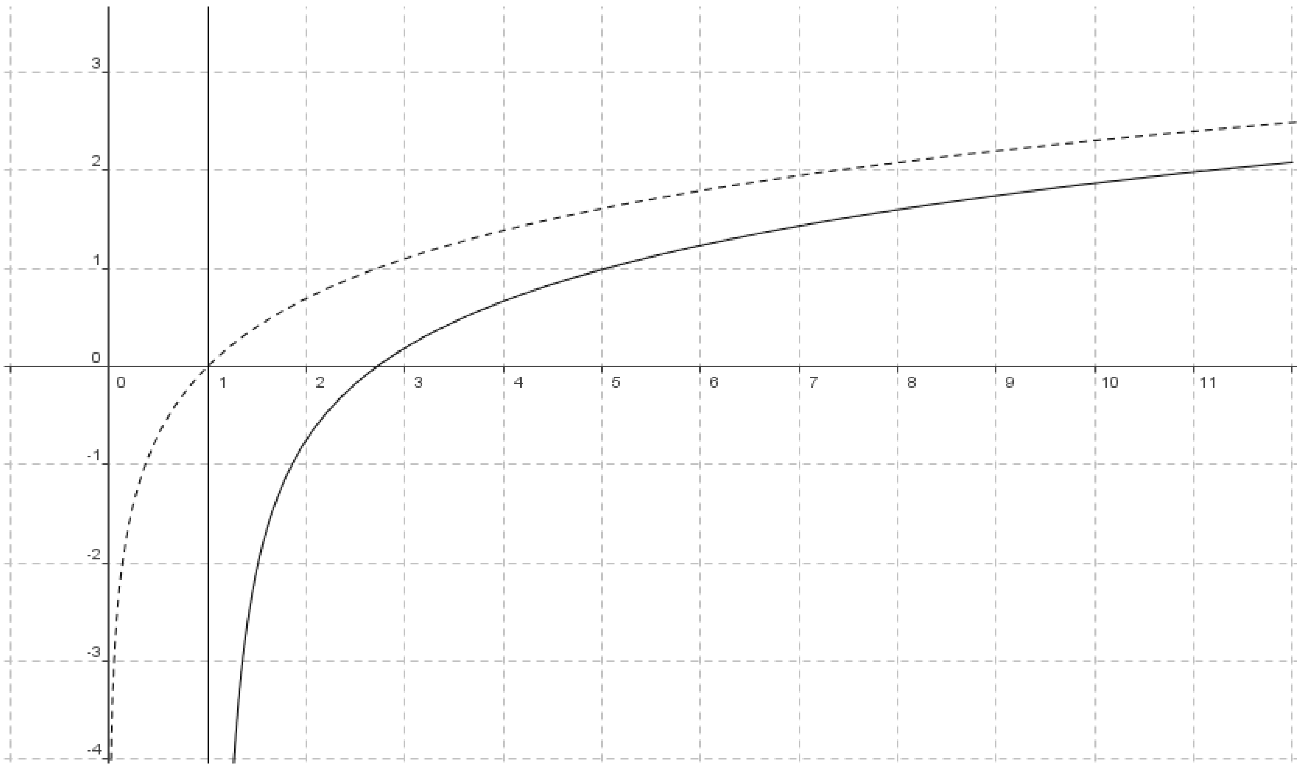
a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle] 1 ; + ∞ [.
Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; + ∞ [par : $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

b. Montrer que sur] 1 ; + ∞ [, les équations : $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.
La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = m\,x$ d'inconnue x.
Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle] 1 ; 10].



EXERCICE 4 (4 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$

1. *a.* Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
1. *b.* Étudier les variations de la suite (x_n).
1. *c.* Que peut-on déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
2. *b.* En déduire la limite de la suite (x_n).
3. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)\,y_n + \sin(1)$.
3. *b.* En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)\,x_n - \cos(1)$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,y_n$.

CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points)

2. *a.* Γ est l'ensemble des points M (x ; y) tels que AM = $\sqrt{2}$ donc tels que AM^2 = 2 soit $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

M ∈ (O ; $\vec{u}$) ⇔ $y = 0$

M ∈(O ; $\vec{u}$) ∩ Γ ⇔ $(x-2)^2+(y-1)^2 = 2$ et $y = 0$

⇔ $y = 0$ et $(x-2)^2+(-1)^2 = 2$ ⇔ $y = 0$ et $(x-2)^2 = 1$

⇔ $y = 0$ et $x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$ ⇔ $y = 0$ et $x = 3$ ou $x = 1$

Les affixes des points intersection de (Γ) et de l'axe (O ; $\vec{u}$) sont : $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

2. *b.* A est le milieu de [BD] donc $\frac{1}{2}(z_D + z_B) = z_A$ soit $z_D = 2\,z_A - z_B$ donc $z_D = 4 + 2\,\text{i} - 1$ donc $z_D = 3 + 2\,\text{i}$

3. *a.* $z_D - z_M = 3 + 2\,\text{i} - \left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\,\text{i}\right) = \frac{12}{5}+\frac{4}{5}\,\text{i}$ et

$z_B - z_M = 1 - \left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\,\text{i}\right) = \frac{2}{5}-\frac{6}{5}\,\text{i}$ donc $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{4\,(3+\text{i})}{2\,(1-3\,\text{i})} = 2\,\text{i}$

b. $\arg\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = (\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MD})$ or $\arg\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \arg(2\,\text{i})$ donc $(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MD}) \equiv \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc le triangle MBD est rectangle en M, M appartient au cercle de diamètre [BD] donc à (Γ).

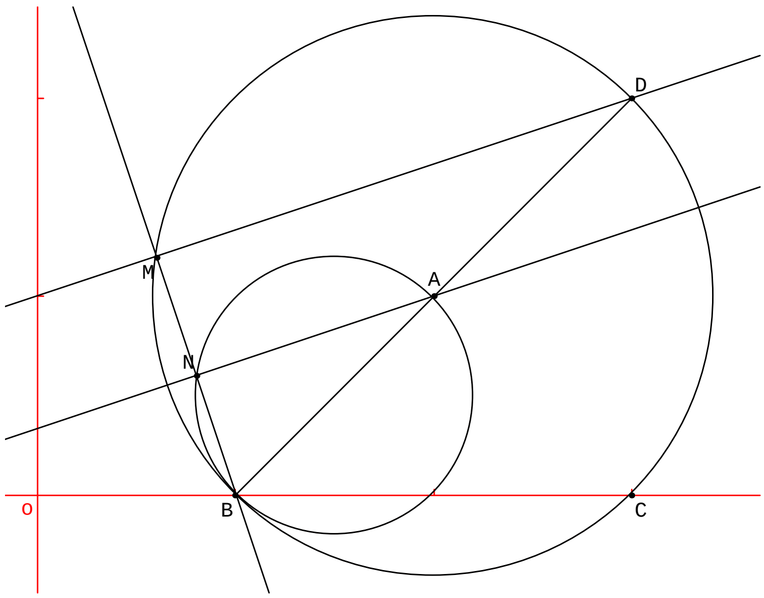
4. *a.* M ∈ (Γ) et [AD] est un diamètre de (Γ) donc le triangle MAD est rectangle en M donc (DM) est perpendiculaire à (BM).

N ∈ (Γ ') et [AB] est un diamètre de (Γ ') donc le triangle NAB est rectangle en N donc (AN) est perpendiculaire à (BN).

B, M et N sont alignés, donc (BM) est perpendiculaires au droites (DM) et (AN) donc les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b. Dans le triangle BDM, la droite (AN) est parallèle à (DM) et passe par le milieu A de [BD] donc passe par le milieu du troisième côté [BM] donc N est le milieu de [BM].

$z_N = \frac{1}{2}(z_B + z_M) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\,\text{i}+1\right) \Leftrightarrow z_N = 0{,}8 + 0{,}6\,\text{i}$



B. *a.* L'écriture complexe de la rotation est : $z' - z_B = e^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$ donc $z_{M'} = -\text{i}\left(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\,\text{i}-1\right) + 1$

$z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}\,\text{i} = 2{,}2 + 0{,}4\,\text{i}$

b. (Γ ') est le cercle de diamètre [AD] , B ∈ (Γ) donc AB = $\sqrt{2}$

Le milieu Ω de [AD] a pour affixe $z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$ donc $z_\Omega = 1{,}5 + 0{,}5\,\text{i}$

Le centre de (Γ ') est le milieu Ω de [AD] d'affixe $z_\Omega = 1{,}5 + 0{,}5\,\text{i}$ de rayon $\frac{1}{2}\text{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ΩM' = | 2,2 + 0,4 i – 1,5 – 0,5 i | = | 0,7 – 0,1 i | donc ΩM' = $\sqrt{0{,}7^2+0{,}1^2} = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, M' ∈ (Γ ')

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A

1. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$ donc $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$

2. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow$ (E) est la sphère de centre I de rayon IA.

PARTIE B

1. *a*. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; 6 ; 0)

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 3 ; 0 ; 4)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times(-3) + 2\times 6 + 3\times 0 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times(-3) + 2\times 0 + 3\times 4 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux droites (AB) et (AC) sécantes donc au plan (ABC).

1. *b*. $\vec{n}\,(4 ; 2 ; 3)$ est normal au plan (ABC) donc une équation du plan (ABC) est de la forme : $4x + 2y + 3z + d = 0$

A $\in$(ABC) donc $4\times 3 + 2\times 0 + 3\times 0 + d = 0$ donc $d = -12$.

Une équation du plan (ABC) est : $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

2. *a*. Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ donc est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM} = k\,\vec{n}$

une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D est donc $\begin{cases} x = 4k - 5 \\ y = 2k \\ z = 3k + 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. *b*. la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) et passe par D donc H est l'intersection de Δ et du plan (ABC)

H $\in \Delta$ donc H a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = 4k - 5 \\ y = 2k \\ z = 3k + 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

H $\in$ (ABC) donc ses coordonnées vérifient : $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

donc $4(4k - 5) + 2\times 2k + 3(3k + 1) - 12 = 0$ soit $29k - 29 = 0$ donc $k = 1$

H est le point de Δ obtenu pour $k = 1$ donc H a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 4)

2. *c*. d(D : (ABC)) = DH = $\sqrt{(-1+5)^2 + 2^2 + (4-1)^2}$ donc DH = $\sqrt{29}$

ce qu'on pouvait trouver avec la formule :

d(D : (ABC)) = $\dfrac{|\,4\times(-5) + 2\times 0 + 3\times 1 - 12\,|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = \dfrac{29}{\sqrt{29}}$

donc d(D : (ABC)) = $\sqrt{29}$

2. *d*. H $\in \Delta$ donc (HD) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) en particulier à (HA) donc $\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HA} = 0$ donc H $\in$ (E).

EXERCICE 3 (6 points)

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ or $x > 1$ donc $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(\ln x)^2} > 0$ donc $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln x = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$

2\. *a*. $f(x) - \ln x = -\dfrac{1}{\ln x}$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x] = 0^+$

La courbe Γ est asymptote à (C) en $+\infty$ et (C) est au dessus de Γ.

3\. *a*. T_a a pour équation : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

T_a passe par l'origine du repère $\Leftrightarrow 0 - f(a) = f'(a)(0 - a)$

$\Leftrightarrow f(a) - a\,f'(a) = 0$.

b. $g(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x} - x\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(\ln x)^2}\right) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x} - \left(1 + \dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)$

$g(x) = \dfrac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(\ln x)^2}$

sur $]1 ; +\infty[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

c. u est un polynôme donc est définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t - 1)(3t + 1)$.

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

u est un polynôme donc a la même limite à l'infini que son terme de plus haut degré.

$u\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{22}{27}$; u est croissante sur $\left]-\infty ; -\dfrac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{3} ; 1\right]$ donc admet un maximum en $-\dfrac{1}{3}$.

$u\left(-\dfrac{1}{3}\right) < 0$ donc pour tout t de $]-\infty ; 1]$ $u(t) < 0$.

u est définie continue strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$;

$u([1 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$

$0 \in [-2 ; +\infty[$ donc l'équation $u(t) = 0$ admet une seule solution α sur $[1 ; +\infty[$.

d. sur $]1 ; +\infty[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

En posant $t = \ln x$, on obtient $g(x) = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0$ avec $t = \ln x$

$\Leftrightarrow t = \alpha$ et $t = \ln x$

$\ln x = \alpha \Leftrightarrow x = e^{\alpha}$ or $\alpha > 1$ donc $e^{\alpha} \in]1 ; +\infty[$ donc $g(x) = 0$ admet une seule solution β ($\beta = e^{\alpha}$) dans $[1 ; +\infty[$.

La tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a\,f'(a) = 0$ soit si et seulement si $g(x) = 0$

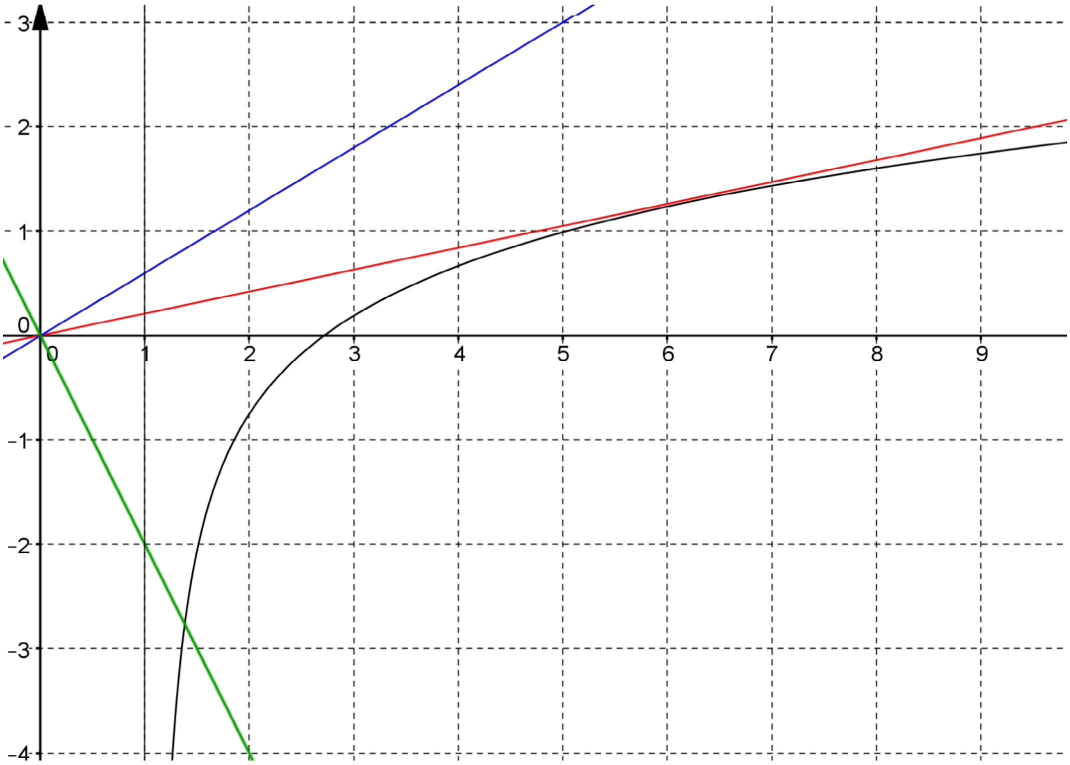
Cette équation admet une seule solution β sur $]1 ; +\infty[$ donc il existe une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

4\. La tangente tracée (droite rouge) a un coefficient directeur de β.

Une droite de coefficient directeur m pivote autour de l'origine.

si $m > \beta$ pas de solution (droite bleue par exemple)

si $m \leq \beta$ une seule solution (droite verte par exemple)


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

EXERCICE 4 (4 points)

1\. *a*. $1 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x \geq 0$ sur $[0\,;1]$

sur $[0\,;1]$ la fonction $t \to t^n \cos t$ est continue et positive donc la suite (x_n) à termes positifs.

1\. *b*. Étudier les variations de la suite (x_n).

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \cos t \, \mathrm{d}t$$

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) \cos t \, \mathrm{d}t$$

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^n (t-1) \cos t \, \mathrm{d}t$$

sur $[0\,;1]$ la fonction $t \to t^n (t-1)\cos t$ est continue et négative
donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$
La suite (x_n) est décroissante.

1\. *c*. (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge et sa limite est comprise entre x_1 et 0

2\. *a*. Pour tout t de $[0\,;1]$: $0 \leq \cos t \leq 1$ donc $0 \leq t^n \cos t \leq t^n$

donc $0 \leq \int_0^1 t^n \cos t \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$ donc $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

2\. *b*. $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3\. *a*. $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, \mathrm{d}t$

Soit $u'(t) = \cos t$ $\quad u(t) = \sin t$
$v(t) = t^{n+1}$ $\quad v'(t) = (n+1)\,t^n$

$$x_{n+1} = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\, t^n \sin t \, \mathrm{d}t$$

$$x_{n+1} = \sin(1) - (n+1)\int_0^1 t^n \sin t \, \mathrm{d}t$$

$x_{n+1} = -(n+1)\, y_n + \sin(1)$.

3\. *b*. $y_n = \dfrac{1}{n+1}(\sin(1) - x_{n+1})$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(1) - x_{n+1} = \sin(1)$

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

4\. $y_{n+1} = (n+1)\, x_n - \cos(1) \Leftrightarrow y_{n+1} = n\, x_n + x_n - \cos(1)$
$\Leftrightarrow n\, x_n = y_{n+1} - x_n + \cos(1)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, x_n = \cos(1)$

$x_{n+1} = -(n+1)\, y_n + \sin(1) \Leftrightarrow x_{n+1} = -y_n - n\, y_n + \sin(1)$
$\Leftrightarrow n\, y_n = -(x_{n+1} + y_n) + \sin(1)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, y_n = \sin(1)$