Amérique du Nord juin 2015

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante :

$$x_0 = -3,\ y_0 = 4 \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\,x_n - 0{,}6\,y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6\,x_n + 0{,}8\,y_n \end{cases}.$$

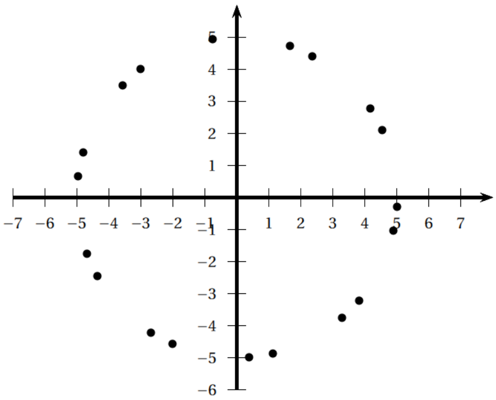
1\. *a.* Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables :	i, x, y, t : nombres réels
Initialisation :	x prend la valeur -3
	y prend la valeur 4
Traitement :	Pour i allant de 0 à 20
	Construire le point de coordonnées (x ; y)
	t prend la valeur x
	x prend la valeur ....
	y prend la valeur ....
	Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2.

On les nommera sur la figure jointe en annexe 2, (à rendre avec la copie).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2\. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n$ l'affixe du point An.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que : $\cos(\theta) = 0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$

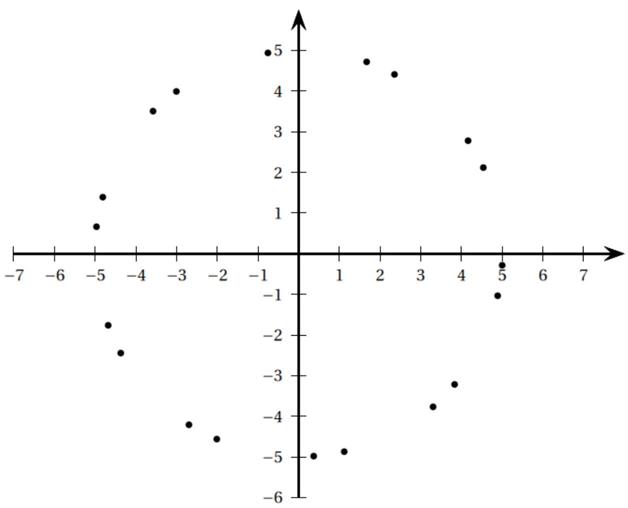
d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.

Représenter θ sur la figure jointe en annexe 2, (à rendre avec la copie).

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

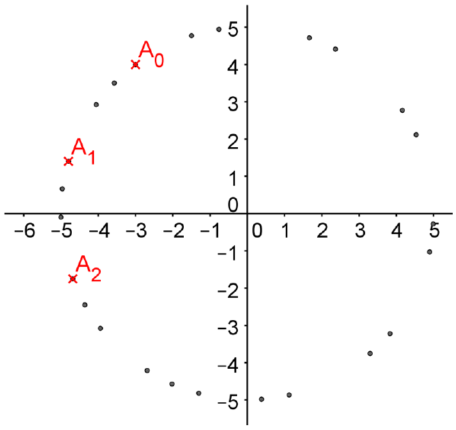
ANNEXE



CORRECTION

1. *a.* A_0 a pour coordonnées (– 3 ; 4). $\begin{cases} x_1 = 0,8\,x_0 - 0,6\,y_0 \\ y_1 = 0,6\,x_0 + 0,8\,y_0 \end{cases}$ donc A_1 a pour coordonnées (– 4,8 ; 1,4), de même A_2 a pour coordonnées (– 4,68 ; – 1,76)

b. Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées (x ; y)
t prend la valeur x
x prend la valeur **0,8 *t* – 0,3 *y*** (ou **0,8 *x* – 0,3 *y***)
y prend la valeur **0,6 *t* + 0,8 *y*** (ne pas utiliser x qui a changé de valeur)
Fin Pour



c. Apparemment les points A_n pour tout n entier naturel, appartiennent au cercle de centre O de rayon 5.

2. *a.* Soit $u_n = |z_n|$.
$|z_{n+1}|^2 = (0,8\,x_n - 0,6\,y_n)^2 + (0,6\,x_n + 0,8\,y_n)^2$

$|z_{n+1}|^2 = 0,8^2\,x^2{}_n - 2 \times 0,8 \times 0,6\,x_n + 0,6^2\,y^2{}_n + 0,6^2\,x^2{}_n + 2 \times 0,8 \times 0,6\,x_n + 0,8^2\,y^2{}_n$

$|z_{n+1}|^2 = 0,64\,x^2{}_n + 0,36\,x^2{}_n + 0,64\,y^2{}_n + 0,36\,y^2{}_n = x^2{}_n + y^2{}_n = |z_n|^2$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = |z_n|$ soit $u_{n+1} = u_n$.

La suite (u_n) est donc constante.

$u_0 = |-3 + 4\,\mathrm{i}| = 5$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 5$

$u_n = 5$ donc $= |z_n| = 5$ soit pour tout entier naturel n, $OA_n = 5$
Pour tout entier naturel n, les points A_n appartiennent au cercle de centre O de rayon 5.

b. $z_{n+1} = (0,8\,x_n - 0,6\,y_n) + \mathrm{i}\,(0,6\,x_n + 0,8\,y_n) = \cos\theta\,x_n - \sin\theta\,y_n + \mathrm{i}\,(\sin\theta\,x_n + \cos\theta\,y_n)$
$e^{\mathrm{i}\theta}\,z_n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\,(x_n + \mathrm{i}\,y_n) = \cos\theta\,x_n + \mathrm{i}\cos\theta\,y_n + \mathrm{i}\sin\theta\,x_n - \sin\theta\,y_n$
donc $e^{\mathrm{i}\theta}\,z_n = \cos\theta\,x_n - \sin\theta\,y_n + \mathrm{i}\,(\sin\theta\,x_n + \cos\theta\,y_n)$ donc pour tout entier naturel n, $e^{\mathrm{i}\theta}\,z_n = z_{n+1}$

c. Pour tout entier naturel n, $e^{\mathrm{i}\theta}\,z_n = z_{n+1}$ donc la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $e^{\mathrm{i}\theta}$ de premier terme z_0 donc, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{\mathrm{i}n\theta}\,z_0$.

d. z_0 est un complexe de module 5.

Pour vérifier que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0, vérifions que $5\,e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = z_0$

$e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times e^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}\ e^{\mathrm{i}\theta}$ donc $e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{i}\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \mathrm{i}\,(0,8 + 0,6\,\mathrm{i})$

$e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = -0,6 + 0,8\,\mathrm{i}$ donc $5\,e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = -3 + 4\,\mathrm{i} = z_0$ soit $z_0 = 5\,e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$.

e. $z_n = e^{\mathrm{i}n\theta} = 5\ e^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \times e^{\mathrm{i}n\theta} = 5\,e^{\mathrm{i}\left((n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$ donc un argument de z_n est $(n + 1)\,\theta + \frac{\pi}{2}$.

Un argument de z_0 est $\theta + \frac{\pi}{2}$ donc $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_0}\right) = \theta + \frac{\pi}{2}$ à 2π près,

donc $\theta = \left(\vec{v}, \overrightarrow{OA_0}\right)$, où $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormé du plan complexe.

Pour tout entier n, $z_n = e^{\mathrm{i}n\theta}\,z_0$ donc $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \theta + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_n}\right)$ et $OA_{n+1} = OA_n$

Pour construire A_{n+1} à partir de A_n, il suffit donc de transformer A_n par la rotation de centre O d'angle θ, cet angle étant représenté par $\left(\vec{v}, \overrightarrow{OA_0}\right)$.