Amérique du Nord juin 2018

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points B(10 ; – 8 ; 2), C(– 1 ; – 8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1.*a.* Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

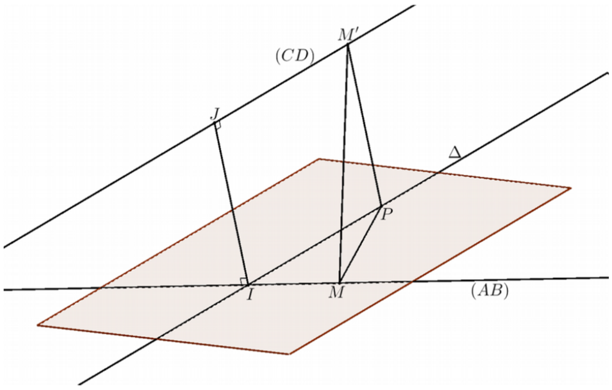
b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD). La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.



On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.

a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que MM' > IJ et conclure.

CORRECTION

1.*a.* $\overrightarrow{AB}$ (10 ; – 8 ; 2) donc $\vec{u}$ (5 ; – 4 ; 1) est un vecteur directeur de (AB), donc un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in$ R.

$\overrightarrow{CD}$ (15 ; 12 ; 3) donc $\vec{v}$ (5 ; 4 ; 1) est un vecteur directeur de (CD) donc un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est $\begin{cases} x = 5k - 1 \\ y = 4k - 8 \\ z = k + 5 \end{cases}$, $k \in$ R.

b. $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Cherchons si (AB) et (CD) sont sécantes, $\begin{cases} 5t = 5k - 1 \\ -4t = 4k - 8 \\ t = k + 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = k - \dfrac{1}{5} \\ -4t = 4k - 8 \\ t = k + 5 \end{cases}$

Les conditions 1 et 3 sont incompatibles donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes. Elles sont ni sécantes, ni parallèles donc elles sont non coplanaires.

2. *a.* $\begin{cases} x = 5t = 5 \\ y = -4t \\ z = t \end{cases}$ donc $t = 1$,

I a pour coordonnées (5 ; – 4 ; 1)

$\begin{cases} x = 5k - 1 = 4 \\ y = 4k - 8 \\ z = k + 5 \end{cases}$ donc $k = 1$,

J a pour coordonnées (4 ; – 4 ; 6).

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées (– 1 ; 0 ; 5) donc

$IJ^2 = 1^2 + 0^2 + 5^2 = 26$ soit $IJ = \sqrt{26}$

b. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 10 + 0 \times (-8) + 5 \times 2 = 0$

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 \times 15 + 0 \times 12 + 5 \times 3 = 0$

La droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3. *a.* M' n'appartient pas à (IJ) donc M', I, J définissent un plan.
La droite Δ est parallèle à (CD) et passe par le point I, elle est donc incluse dans le plan (IJM').

Dans le plan (IJM'), la droite Δ est perpendiculaire à (IJ) et donc aussi à la parallèle à (IJ) passant par M'.

Conclusion : la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M′ coupe la droite Δ en un point noté P.

b. Les droites (IJ) et (M'P) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Or la droite Δ (de vecteur directeur $\overrightarrow{IP}$) est parallèle à (CD) donc les vecteurs $\overrightarrow{M'P}$ et $\overrightarrow{IP}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP), donc à tout vecteur de ce plan et en particulier à $\overrightarrow{MP}$ donc le triangle MPM′ est rectangle en P.

3. *c.* Le triangle MPM′ est rectangle en P donc MM' est l'hypoténuse de ce triangle.
Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est supérieure à celles des côtés de l'angle droit
donc MM' > M'P.

or M' P = I J donc MM' > IJ donc la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).