Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 3 cm), on considère la courbe (C) représentative de la fonction $f : x \to x^3 + 2x^2 - x - 1$.

1° Dresser le tableau de variation de f (on fera l'étude complète de la fonction f) et tracer (C)

2° On considère la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.

a) Déterminer l'équation de (T)

b) Etudier la position de (T) par rapport à (C)

c) Déterminer, en cm², l'aire du domaine fermé délimité par (C) et (T)

CORRECTION

1° f est un polynôme donc est une fonction définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$

f est un polynôme donc admet à l'infini la même limite que son terme de plus haut degré donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$\Delta = 16 + 12 = 28$ donc $x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{7}}{6} = -\dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

2° *a*) $f'(0) = -1$ et $f(0) = -1$ donc T a pour équation : $y = -x - 1$

b) $f(x) - (-x - 1) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$

donc si $x > -2$, $f(x) - (-x - 1) > 0$ donc la courbe de f est au dessus de T sur $]-2 ; +\infty[$

si $x \le -2$, $f(x) - (-x - 1) \le 0$ donc la courbe de f est en dessous de T sur $]-2 ; +\infty[$

$f(x) - (-x - 1) = 0$ si $x = 0$ ou $x = -2$ donc la tangente T courbe la courbe en deux points d'abscisse 0 (point de tangence) et – 2.

c) Sur [– 2 ; 0], la courbe de f est au dessus de T donc $A = \displaystyle\int_{-2}^{0} [f(x) - (-x - 1)]\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 + 2x^2)\,dx$

$$A = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0} = -\left(\frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{2}{3}\times 2^3\right) = \frac{4}{3}\ u.\,a.$$

L'unité graphique est 3 cm donc 1 *u. a.* est 9 cm² donc $A = \dfrac{4}{3} \times 9 = 12\ \text{cm}^2$