Solution de l'exercice de révision

Énoncé

1. A t=0, la capacité est neutre (figure 1). On ferme l'interrupteur, calculer le courant débité par E à l'instant initial (I_0) puis en régime permanent (I_1), au bout d'un temps suffisamment long.
2. On ouvre de nouveau l'interrupteur, calculer le courant dans la capacité à t=10 ms après l'ouverture. On utilisera les valeurs numériques de la figure 2 avec E=12 V
3. On remplace le générateur E par une source alternative délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude 12V et de fréquence 50 Hz (figure 2). Calculer la tension V_C

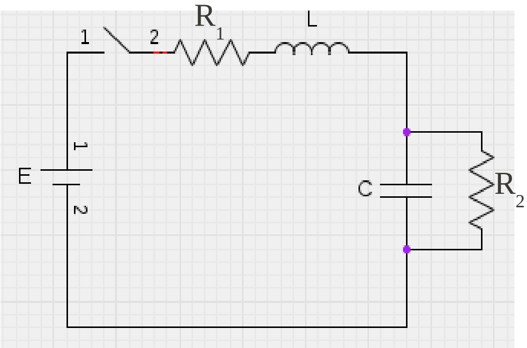

Figure 1

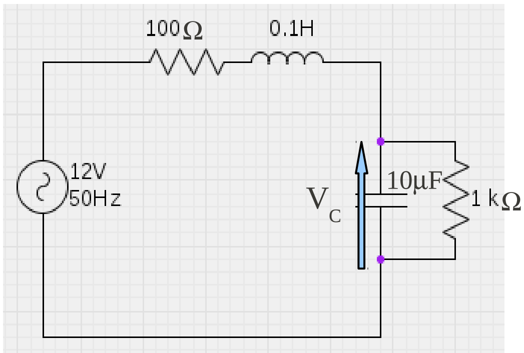

Figure 2

Solution

1. À la fermeture de l'interrupteur, l'inductance se comporte comme un circuit ouvert, empêchant le courant de passer. Donc $I_0=0$. Au bout d'un temps long, le courant est établi, l'inductance se comporte comme un court circuit et la capacité est totalement chargée, elle se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit est équivalent aux deux résistances en série alimentées par le générateur.

$$I_1=\frac{E}{R_1+R_2}$$

Lorsqu'on ouvre le circuit dans ce régime, le générateur est hors circuit, et la capacité a sa charge maximale qui va se décharger dans la résistance R_2. L'équation de ce régime transitoire est :

$\frac{Q}{C}+R_2 I=0$ avec $I=\frac{dQ}{dt}$ d'où l'équation de décharge de la capacité : $Q=Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$; Q_0 étant la charge initiale à l'ouverture du circuit soit : $Q_0=CV_C$, V_C étant la tension aux bornes de la capacité à l'ouverture du circuit et $\tau=CR_2=10^{-5}.10^3=10^{-2}\,s$

$$V_C=E-R_1 I_1=E\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

En dérivant, on obtient la relation du courant : $I(t)=-\frac{E}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}$, le signe (-) indique que le courant dans la boucle circule dans un même sens (avant l'ouverture, le courant total se partageait dans les deux branches) D'où à *t=10 ms* : $I_1=\frac{12}{1100}e^{-1}=\frac{12}{2970}\simeq 4\text{ mA}$

3. On utilise la notation complexe. Équations du circuit :

$\bar{E}=\bar{Z}\,\bar{I}$ (1) , $\bar{V}_C=\bar{E}-(jL\omega+R_1)\bar{I}$ (2)

$$\bar{Z}=(R_1+jL\omega)+\frac{\frac{R_2}{jC\omega}}{R_2+\frac{1}{jC\omega}}=(R_1+jL\omega)+\frac{R_2}{1+jR_2C\omega} \quad (3)$$

On a besoin de $|\bar{Z}|$. Il suffit de l'écrire sous forme du rapport de deux nombres complexes.

En manipulant $\bar{Z}$, on obtient : $\bar{Z}=\frac{\left[R_1+R_2(1-LC\omega^2)\right]+j(L\omega+R_1R_2C\omega)}{1+jR_2C\omega}$

Et le module

$$|Z|^2=\frac{\left[R_1+R_2(1-LC\omega^2)\right]^2+(L\omega+R_1R_2C\omega)^2}{1+(R_2C\omega)^2}$$

On vérifie l'homogénéité de la formule : c'est bien une impédance.
Calcul numérique : $LC\omega^2=(0.1).10^{-5}.10^5=0.1$; $R_1R_2C\omega=10^5.10^{-5}.10^2\pi=100\,\pi$; $L\omega=10\,\pi$; $R_2C\omega=\pi$

$$|Z|^2=\frac{(1.12).10^6}{11}\Rightarrow|Z|=319\,\Omega$$

Pour le calcul de V_C, on utilise l'équation (2) qui s'écrit :

$\bar{V}_c=\bar{E}\left(1-\frac{(R_1+jL\omega)}{\bar{Z}}\right)=\bar{E}\frac{R_2}{(1+jR_2C\omega)\bar{Z}}$ et donc : $V_c=E\frac{R_2}{|Z|\sqrt{1+R_2^2C^2\omega^2}}=1{,}13\text{ V}$