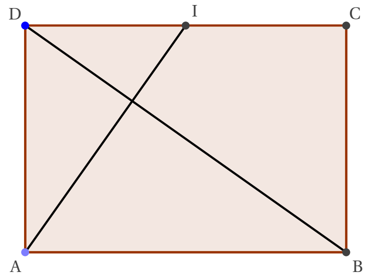
Produit scalaire

▷ **Exercice 1.** On considère un rectangle ABCD tel que $AD = 1$ et $AB = \sqrt{2}$. I est le milieu de [CD].



1. Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$
   $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 1$
2. En remarquant que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$, calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}\right)\\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DI}\\ &= 0 - BA \times DI\\ &= -\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ &= -1\end{aligned}$$

3. Démontrer que les droites (BD) et (AI) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AI} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AI}\\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}\\ &= -1 + 1\\ &= 0\end{aligned}$$

On peut donc en déduire que $(BD) \perp (AI)$

▷ **Exercice 2.** Soit ABC un triangle tel que $AB = 5\ cm$, $AC = 6\ cm$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

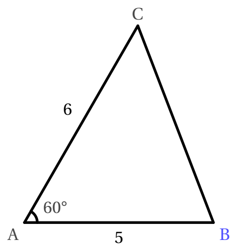
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 5 \times 6 \times \cos(60°) = 15$.
2. En exprimant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d'une autre manière, montrer que $BC = \sqrt{31}$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(61 - BC^2\right)$.
   On en déduit : $\frac{1}{2}\left(61 - BC^2\right) = 15 \iff 61 - BC^2 = 30 \iff BC = \sqrt{31}$
3. Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 21$. En déduire une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BCA}$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos\widehat{ACB} = 6\sqrt{31}\cos\widehat{CAB}$

et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right) = 21$

d'où $6\sqrt{31}\cos\widehat{ACB} = 21 \iff \cos\widehat{ACB} = \dfrac{21}{6\sqrt{31}}$

donc $\widehat{ACB} \approx 51°$



▷ **Exercice 3.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 1 cm), on considère les points A$(-3\ ;\ 2)$, B$(3\ ;\ 5)$ et C$(5\ ;\ -4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 30$

2. Calculer les distances AB et AC.

$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$ et $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$

3. Déduire des questions précédentes une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$

On a $\begin{cases}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30\\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 30\sqrt{5}\cos\widehat{BAC}\end{cases}$ d'où $30\sqrt{5}\cos\widehat{BAC} = 30 \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ d'où $\widehat{BAC} \approx 63°$

4. Soit D$(1,5\ ;\ 3)$. Montrer que (CD) ⊥ (AB) et que (BD) ⊥ (AC).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3,5\\7\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = xx' + yy' = 0$ donc (CD) ⊥ (AB)

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1,5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 0$ donc (BD) ⊥ (AC)

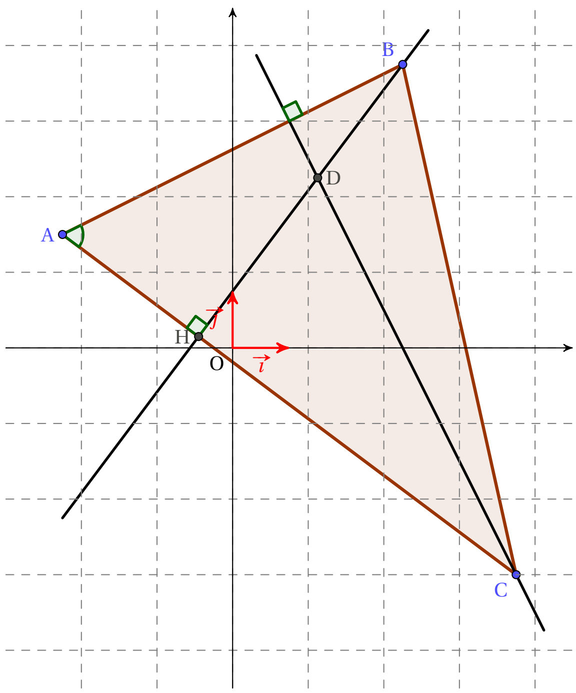
5. Que représente le point D pour le triangle ABC ?

On déduit de la question précédente que (BD) et (CD) sont deux hauteurs du triangle ABC et donc que leur point d'intersection D est l'orthocentre du triangle.

6. Soit H le point d'intersection des droites (BD) et (AC). Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$. En déduire que $AH = 3\ cm$.

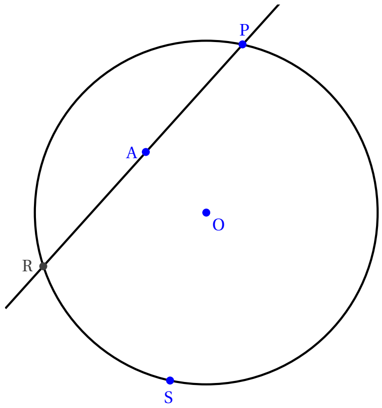
H est le projeté orthogonal de B sur (AC) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$

d'où $AH \times AC = 30 \iff AH \times 10 = 30 \iff AH = 3$



▷ **Exercice 4.**

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de rayon r et de centre O. Le point A est intérieur à $\mathscr{C}$. La droite (d) passe par A et coupe $\mathscr{C}$ en deux points R et P. Le point S est diamétralement opposé à P sur le cercle.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS} = AO^2 - r^2$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS} &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS}\right) \\
&= AO^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}}_{\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OS}} \\
&= AO^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP}}_{= \vec{0}}\right) - \underbrace{\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS}}_{OS = r} \\
&= AO^2 - r^2
\end{aligned}$$

2. Démontrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS} = -AP \times AR$

Le triangle PRS est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [PS] donc il est rectangle en R. Ainsi R est le projeté orthogonal de S sur (AP).

On a donc : $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = -AP \times AR$

3. En déduire que $AP \times AR = r^2 - AO^2$

On déduit de ce qui précède : $-AP \times AR = AO^2 - r^2$ ou encore $AP \times AR = r^2 - AO^2$.