On considère l'équation (E): $x^2 - R\,x + 56 = 0$ où R est un entier naturel

1. Montrer que si (E) a une solution entière n alors n divise 56
2. Montrer que si n est solution de (E), $R - n$ l'est aussi
3. Déterminer les valeurs de R pour lesquelles (E) admet 2 solutions entières positives
4. Pour chaque valeur de R, donner les solutions de (E).

CORRECTION

1. Si (E) a une solution entière n alors $n^2 - R\,x + 56 = 0$ soit $n\,(R - n) = 56$
$R - n$ est un entier relatif (différence de deux entiers) donc n divise 56.

2. Si (E) a une solution entière n alors $n^2 - R\,x + 56 = 0$
$(R - n)^2 - R\,(R - n) + 56 = R^2 - 2\,R\,n + n^2 - R^2 + R\,n + 56$
$(R - n)^2 - R\,(R - n) + 56 = n^2 - R\,x + 56 = 0$ donc $R - n$ est solution de (E).

3. Si (E) admet 2 solutions entières positives alors ces solutions sont n et $R - n$ et sont des diviseurs de 56.
Le produit des racines est égal à 56 donc $n\,(R - n) = 56$ donc pour chaque valeur de n diviseur de 56, $R - n = \dfrac{56}{n}$

n	1	2	4	8	7	14	28	56
$R - n$	56	28	14	7	8	4	2	1
$R = n + (R - n)$	57	30	18	15	15	18	30	57

Les valeurs de R pour lesquelles (E) admet 2 solutions entières positives sont 15 ; 18 ; 30 ; 57.

4. Les solutions de (E) sont :
Si $R = 15$, $n_1 = 1$ et $n_2 = 56$
Si $R = 18$, $n_1 = 2$ et $n_2 = 28$
Si $R = 30$, $n_1 = 4$ et $n_2 = 14$
Si $R = 57$, $n_1 = 8$ et $n_2 = 7$