Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note:

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330.$$

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100. Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables :	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tant que $a \leq 1100$, faire:
	Affecter à a la valeur ….
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

CORRECTION

1. Le volume d'eau est constant donc $a_n + b_n = 2200$.

2. Tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A donc le bassin A reçoit $0{,}15\, b_n = 0{,}15\,(2200 - a_n)$ soit $330 - 0{,}15\, a_n$

Tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B donc le bassin A perd $0{,}10\, a_n$

$a_{n+1} = a_n + 330 - 0{,}15\, a_n - 0{,}10\, a_n$

donc $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 330$ soit $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables :	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tant que $a \leq 1100$, faire:
	Affecter à a la valeur **$0{,}75\, a + 330$**
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4. *a.* $u_n = a_n - 1320$ donc $a_n = u_n + 1320$

$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$

donc $u_{n+1} + 1320 = \frac{3}{4}(u_n + 1320) + 330$

$u_{n+1} + 1320 = \frac{3}{4}u_n + 990 + 330$ donc $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n$

$a_0 = 800$ donc $u_0 = 800 - 1320 = -520$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -520$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

b. $u_n = q^n u_0$ donc $u_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$a_n = u_n + 1320$

donc pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche n tel que $a_n = b_n = 1100$ à 1 près

Il faut donc déterminer n tel que $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$

donc tel que $520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{220}{520} = \frac{11}{26} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right)^n = \ln\left(\frac{11}{26}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right) \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ donc $n \approx 3$

Le troisième jour les deux bassins auront, au mètre cube près, le même volume d'eau.

n	a_n	b_n	Test
0	800	1300	$b_n > a_n$
1	930	1270	$b_n > a_n$
2	1027,5	1172,5	$b_n > a_n$
3	**1100,6**	**1099,4**	$\boldsymbol{b_n \approx a_n}$
4	1155,5	1044,5	$b_n < a_n$