OPERATEURS DIFFERENTIELS

1 – Champ scalaire. Application f de U ouvert de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$) à valeur dans $\mathbb{R}$.

Gradient : f $C^1(U)$; $\overrightarrow{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \vec{\nabla}\,(f)$ (C'est un champ vectoriel)

Laplacien : f $C^2(U)$; $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (C'est un champ scalaire)

Avec l'opérateur Nabla : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)$

2 – Champ de vecteur : Application f de U ouvert de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) à valeur dans $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$)

$\vec{f}\,(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ avec les f_i C^1 (U)

Divergence : $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \vec{\nabla}.\vec{f}$

Rotationnel : $$\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \left(+\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \;;\; -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \;;\; +\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

3 - Formules.

- $\overrightarrow{grad}$, div, Δ, et $\overrightarrow{rot}$ sont des opérateurs linéaires
- Produits. (sous réserve d'existence)
  - $\overrightarrow{grad}\,(fg) = f\,\overrightarrow{grad}\,(g) + g\,\overrightarrow{grad}\,(f)$
  - $div\,(f\,\vec{g}\,) = f\,div\,\vec{g} + \overrightarrow{grad}\,(f).\vec{g}$
  - $\overrightarrow{rot}\,(f\,\vec{g}) = f\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{g}) + \overrightarrow{grad}\,(f) \wedge \vec{g}$
  - $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\,\overrightarrow{grad}\,(f).\overrightarrow{grad}\,(g) + g\Delta f$
- $div\left(\vec{f} \wedge \vec{g}\,\right) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{f}\right).\vec{g} - \vec{f}\,.\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{g})$.
- Sont nuls.
  - $\overrightarrow{rot}\,(\,\overrightarrow{grad}\,f\,) = \vec{0}$
  - $div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{f}\right) = 0$
- $\overrightarrow{rot}\left(f\,\overrightarrow{grad}\,g\right) = \overrightarrow{grad}\,f \wedge \overrightarrow{grad}\,g$

4 – Potentiel scalaire. $\vec{F}$: $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ champ de vecteur de classe C^1

- $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire (ou admet)
  si il existe un champ scalaire f de $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tel que $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\,f$.
- **Théorème**.
  1°) Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire alors $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$
  2°) Si $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ et si U est étoilé, alors $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire

$\Longrightarrow$ *se démontre avec le théorème de Poincaré. (Voir formes différentielles)*