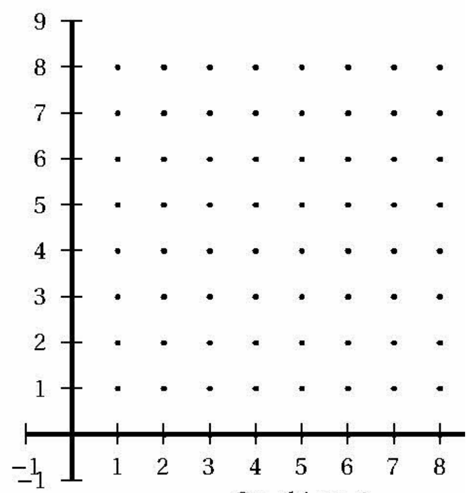
Asie juin 2008

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées (x ; y) sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note $R_{a,\,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

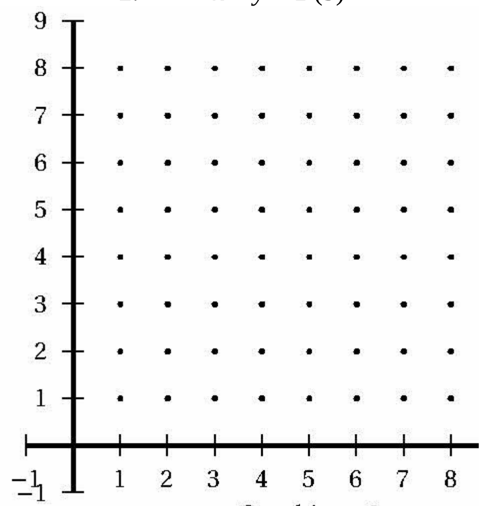
A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur l'annexe.
Représenter graphiquement les points M(x ; y) du réseau $R_{8,\,8}$ vérifiant :

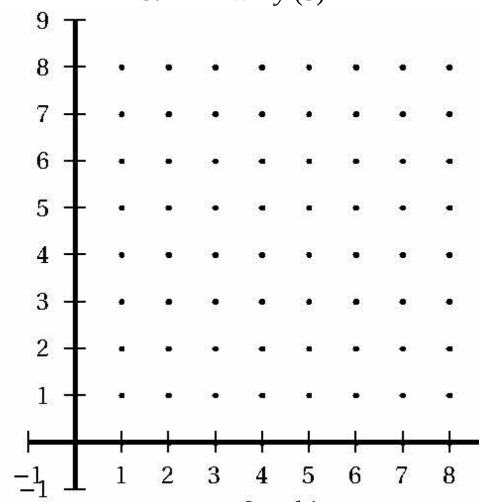
1. $x \equiv 2$ (3) et $y \equiv 1$ (3)
2. $x + y \equiv 1$ (3)
3. $x \equiv y$ (3)



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7\,x - 4\,y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0 ; y_0) solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution (x ; y) pour laquelle le point M(x ; y) correspondant appartient au réseau $R_{4\,,\,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau $R_{a,\,b}$, avec O(0 ; 0) et A(a ; b).

1. Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions : $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $a\,y = b\,x$.

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,\,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.)

CORRECTION

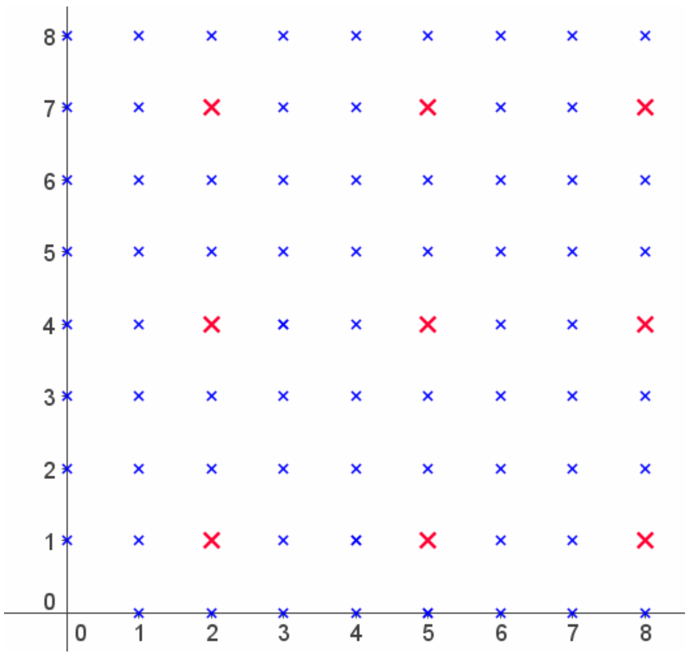
A - Représentation graphique de quelques ensembles

1. Il faut examiner toutes les possibilités :

$0 \leq x \leq 8$ et $x \equiv 2$ (modulo 3) $\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 5$ ou $x = 8$

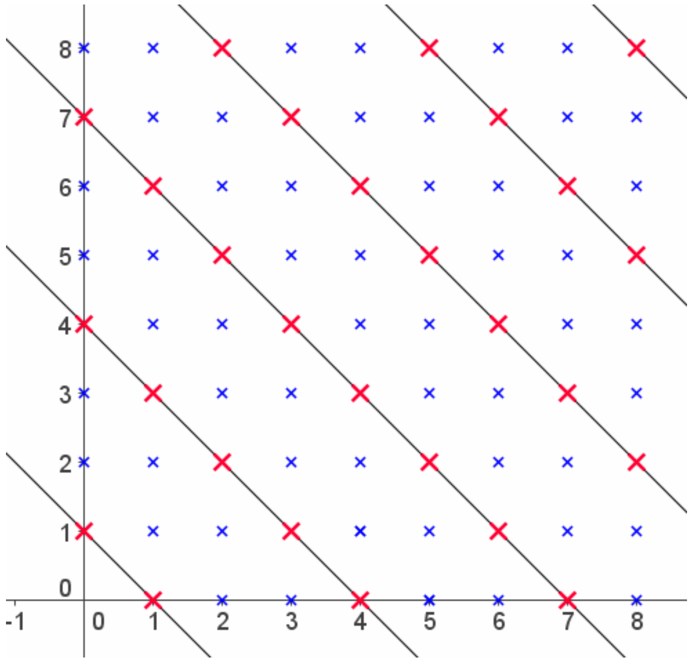
$0 \leq y \leq 8$ et $y \equiv 1$ (modulo 3) $\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 4$ ou $y = 7$

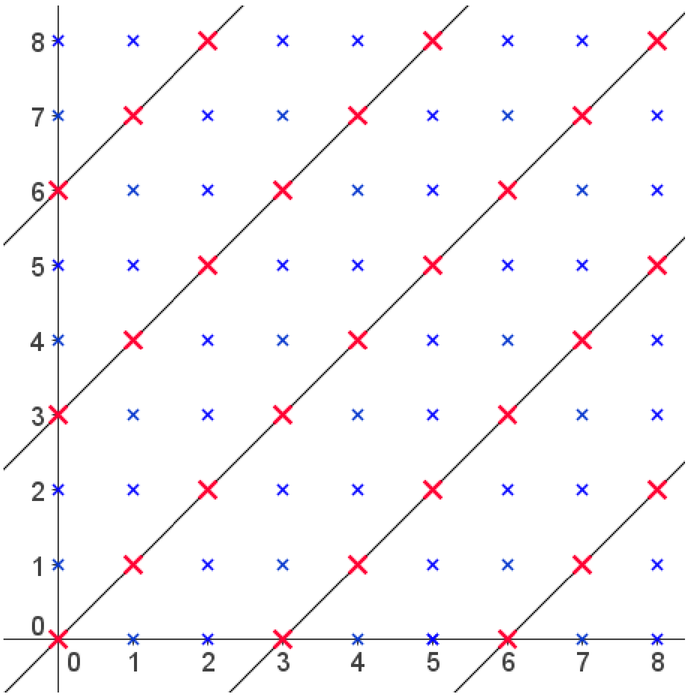
On obtient donc les points de coordonnées (2 ; 1) (2 ; 4) (2 ; 7) (5 ; 1) (5 ; 4) (5 ; 7) (8 ; 1) (8 ; 4) (8 ; 7)



2. $x + y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 2
$0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq y \leq 8$ donc $0 \leq x + y \leq 16$ donc soit $x + y = 1$ ou 4 ou 7 ou 10 ou 13 ou 16
Il suffit de tracer ces différentes droites et de cocher les points du réseau situés sur ces droites
On peut retrouver ce résultat en mettant à l'intérieur du tableau la somme $x + y$

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16





3. $x \equiv y$ (modulo 3), donc $y = x$ ou $y = x + 3$ ou $y = x + 6$ ou $y = x - 3$ ou $y = x - 6$
Il suffit de tracer ces différentes droites et de cocher les points du réseau situés sur ces droites

B - Résolution d'une équation

1. $7 \times 3 = 21$ et $4 \times 5 = 20$ donc (3 ; 5) est solution de l'équation (E).

2. $7x - 4y = 1$ et $7 \times 3 - 4 \times 5 = 1$ donc par soustraction membre à membre : $7(x - 3) - 4(y - 5) = 0$
$7(x - 3) = 4(y - 5)$ donc 7 divise $4(y - 5)$ or 4 et 7 sont premiers entre eux donc 7 divise $y - 5$
Il existe un entier relatif k tel que $y - 5 = 7k$
donc en remplaçant dans $7(x - 3) = 4(y - 5)$, on obtient que $x - 3 = 4k$

donc $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification : si $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ alors $7x - 4y = 28k + 21 - 28k - 20 = 1$

donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(4k + 3 ; 7k + 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Si $M \in R_{4,7}$ alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 7$ avec $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

donc $0 \leq 4k + 3 \leq 4$ et $0 \leq 7k + 5 \leq 7$

soit $\frac{-3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{-5}{7} \leq k \leq \frac{2}{7}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 0$

l'équation (E) admet une unique solution (3 ; 5) pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau $R_{a,\,b}$, avec O(0 ; 0) et A(a ; b).

1. M $\in$ [OA] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = k\,\overrightarrow{OA}$ avec $0 \le k \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\,a \\ y = k\,b \\ 0 \le k \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$

2. Soit M un point du réseau appartenant à [OA], alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$

$b\,x = a\,y$ donc b divise $a\,y$, or a et b sont premiers entre eux donc b divise y (théorème de Gauss)

donc $0 \le y \le b$ donc $y = 0$ ou $y = b$. En remplaçant dans $b\,x = a\,y$ alors soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,\,b}$.

3. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD d est différent de 1 donc $d \ge 2$
Soit a' et b' deux nombres premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

Soit M un point du réseau appartenant à [OA], alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$ soit $\begin{cases} b'\,x = a'\,y \\ 0 \le x \le d\,a' \\ 0 \le y \le d\,b' \end{cases}$

$\begin{cases} x = a' \\ y = b' \end{cases}$ vérifie les conditions donc le segment [OA] contient au moins le point A'(a' ; b') du réseau qui est distinct de O et A.