Amérique du Nord juin 2010

EXERCICE 1 4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

A(1 ; – 2 ; 4) B(– 2 ; – 6 ; 5) C(– 4 ; 0 ; – 3).

1. *a.* Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. *a.* Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.

a. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2 3 points

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe – 2 i et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq$ i) associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}$.

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3. *a.* Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i,

$$(z' + 2\mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1.$$

b. En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq$ i) :

$BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. *a.* Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. *b.*, placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle B D' E' ?

EXERCICE 3 5 points Enseignement de spécialité

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$.

1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} z$.

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n. Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $OM_{n+4} = 4\, OM_n$ et que $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

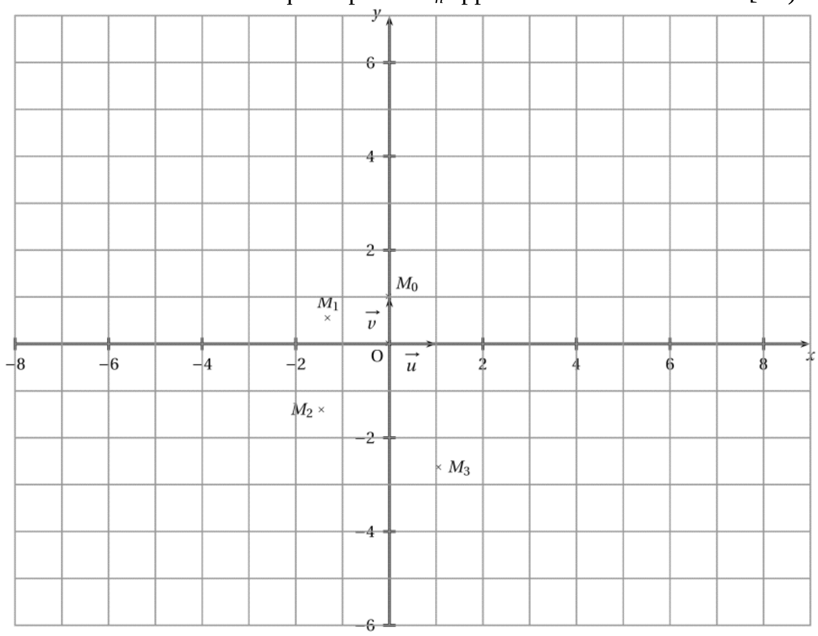
3. Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

a. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p}\right)$.

b. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.



EXERCICE 4 8 points

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,\mathrm{e}^{-x}}$.

2. *a.* Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. *a.* Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\,;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_1.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.

c. Tracer la droite (T_1).

4. *a.* Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0\,;\ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

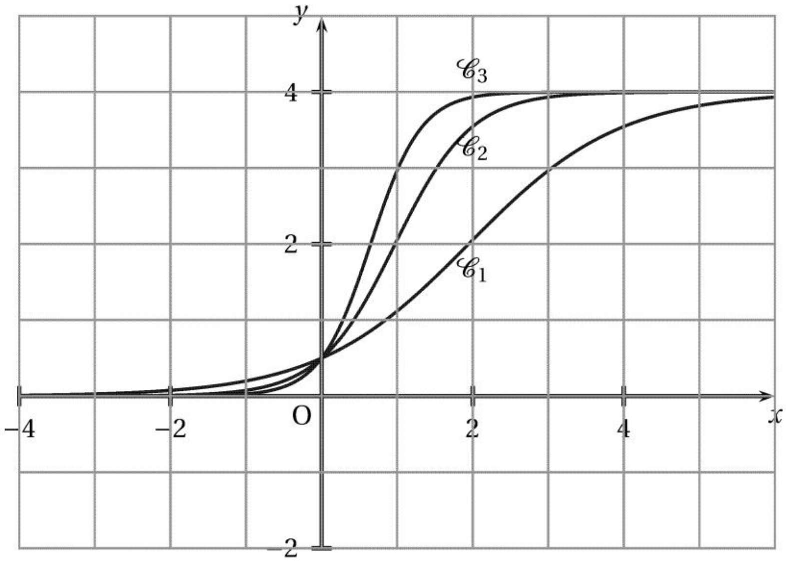
b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.

c. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.



CORRECTION

Exercice 1 Commun à tous les candidats 5 points

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 3 ; – 4 ; 1) ; $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 5 ; 2 ; – 7), les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -3 \times 1 + (-4) \times (-1) + 1 \times (-1) = -3 + 4 - 1 = 0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -5 \times 1 + 2 \times (-1) + (-7) \times (-1) = -5 - 2 + 7 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ (1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

c. le vecteur $\vec{n}$ (1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) *a* une équation de la forme $x - y - z + d = 0$.

C appartient au plan donc $-4 - 0 + 3 + d = 0$ donc $d = 1$

Une équation du plan (ABC) est $x - y - z + 1 = 0$.

2. *a.* la droite Δ passant par le point O et orthogonale au plan (ABC) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ donc est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = t\,\vec{n}$

Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. Le point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) est le point d'intersection de Δet du plan (ABC), il *a* des coordonnées de la forme (t ; $-t$; $-t$) qui vérifient l'équation du plan soit $x - y - z + 1 = 0$.

donc $3t + 1 = 0$ donc $t = -\dfrac{1}{3}$

Les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) sont $\left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

3. *a.* $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = t\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = t\,BC^2$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$

H est la projection orthogonale du point O sur la droite (BC) donc (OH) est orthogonale à (BC) donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ donc :

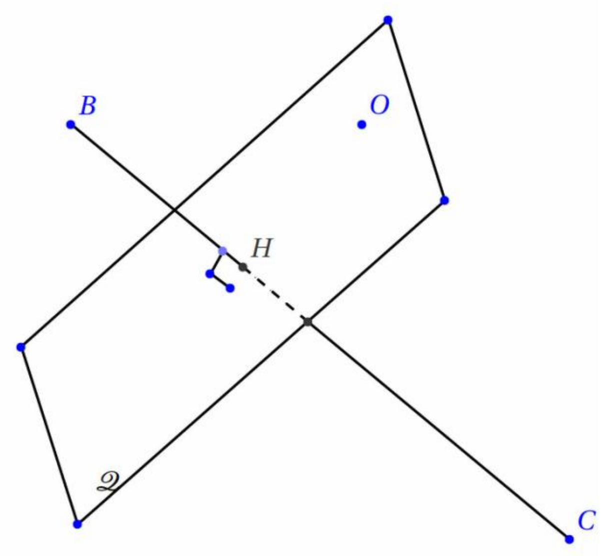
$t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.

b. $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (−2 ; 6 ; −8) donc $BC^2 = 2^2 + 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 104$

$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = 2 \times (-2) + 6 \times 6 + (-5) \times (-8) = -4 + 36 + 40 = 72$

donc $t = \dfrac{72}{104} = \dfrac{9}{13}$, $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x + 2 = -2t \\ y + 6 = 6t \\ z - 5 = -8t \end{cases}$ donc les coordonnées du point H sont $\left(-\dfrac{44}{13} ; -\dfrac{24}{13} ; -\dfrac{7}{13}\right)$.



EXERCICE 2 3 points

La composition de l'urne est la suivante : pour 100 boules

numéro 1	numéro 2 (au total 80 boules)	
20 rouges	8 rouges	80 – 8 = 72 vertes

1. L'urne contient 28 % de boules rouges donc la probabilité que la boule tirée soit rouge est 0,28

2. Soit les événements R : « choisir une boule rouge »

N_2 « choisir une boule portant le numéro 2 »

$p = \dfrac{p\,(\mathrm{R} \cap \mathrm{N}_2)}{p\,(\mathrm{R})} = \dfrac{8}{28} = \dfrac{2}{7}$

3. *a.* L'événement « obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des *n* tirages » est l'événement contraire de « ne pas obtenir de boule rouge portant le numéro 1 au cours des *n* tirages »

donc $p = 1 - 0{,}8^n$

b. $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \geq 0{,}8^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}8 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$ donc $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 21$

Il faut donc au moins 21 tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

1. E est le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct donc E est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$

donc $z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A)$ donc $z_E - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i)$

$z_E - i = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2. $z_{D'} = \frac{2\times 1 - i}{i\times 1 + 1} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i - i - 1}{2}$ donc $z_{D'} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

3. *a.* pour tout nombre complexe z différent de i, $z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$

donc $z' + 2i = \frac{2z - i}{iz + 1} + 2i = \frac{2z - i - 2z + 2i}{iz + 1}$ donc $z' + 2i = \frac{i}{iz + 1} = \frac{i}{i(z - i)} = \frac{1}{z - i}$

pour tout nombre complexe z différent de i, $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b. pour tout nombre complexe z différent de i, $(z' + 2i)(z - i) = 1$ donc

$|z' + 2i| \times |z - i| = 1$ et $\arg[(z' + 2i)(z - i)] = \arg 1 + 2k\pi$

$|z' - z_B| \times |z - z_A| = 1$ et $\arg(z' - z_B) + \arg(z - z_A) = 2k\pi$

pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) : BM' × AM = 1 et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. *a.* $|z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{2}$ donc AD = $\sqrt{2}$

E est l'image de D par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc AE = AD

Les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. le point E' associé au point E par l'application f est tel que :

BE' × AE = 1 et $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

soit BE' = $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

le point D' associé au point D par l'application f est tel que :

BD' × AD = 1 et $(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

AE = AD donc BE' = BD donc E' appartient au cercle de centre B passant par D.

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) + k\times 2\pi$ donc $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AE}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AD}) + k\times 2\pi$

$(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) + k\times 2\pi$

E est le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi$ donc $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi$

BE' = BD' = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{BE'}) = -\frac{\pi}{3} + k\times 2\pi$ donc E' est l'image de D' par la rotation de centre B d'angle $-\frac{\pi}{3}$

<u>Autre construction :</u>

Construisons le parallélogramme AEB'B donc BB' = AE = $\sqrt{2}$.

Soit I le milieu de [BB'] donc BI = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = (\vec{u}, \overrightarrow{BB'}) + k\times 2\pi$

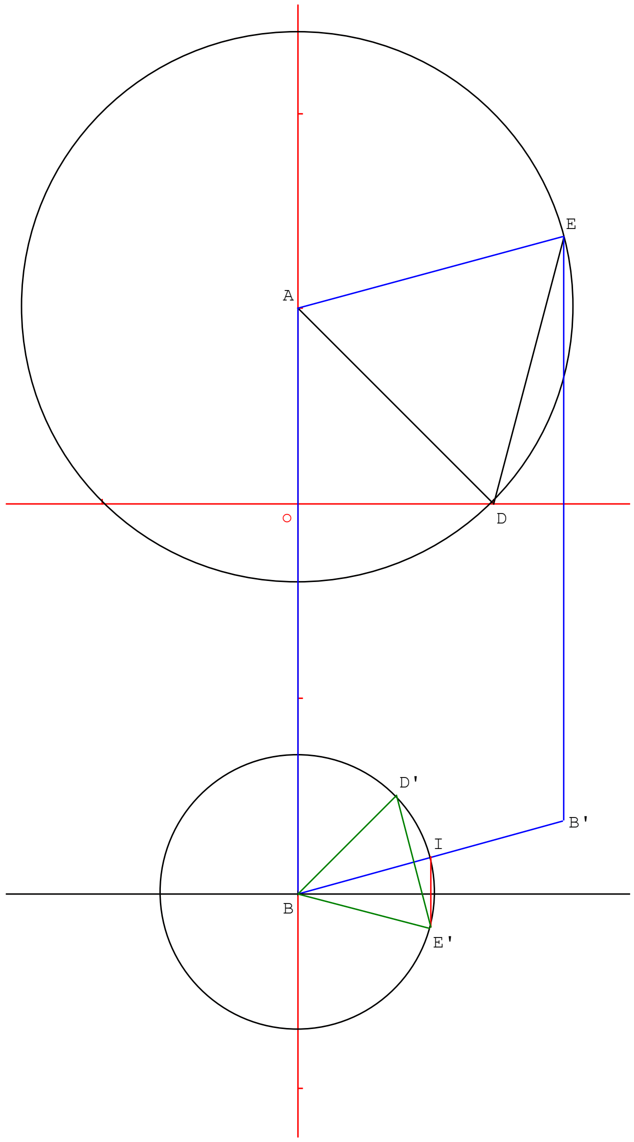
Soit Γ le cercle de centre B passant par I, BE' = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc E' appartient à Γ

$(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

donc $(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{BB'}) + k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

donc E' est le point du cercle Γ, symétrique de I par rapport à la parallèle en B à l'axe des réels.

5. E' est l'image de D' par la rotation de centre B d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc le triangle B D' E' est équilatéral indirect.


E
A
D
D'
I
B'
B
E'

EXERCICE 3 5 points Enseignement de spécialité

Partie A

1. $16 \times 1 - 3 \times 4 = 4$ donc le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. $\begin{cases} 16\,x - 3\,y = 4 \\ 16 \times 1 - 3 \times 4 = 4 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :

$16\,(x - 1) - 3\,(y - 4) = 0$ soit $16\,(x - 1) = 3\,(y - 4)$

16 divise $3\,(y - 4)$ or 16 et 3 sont premiers entre eux donc 16 divise $y - 4$ (théorème de Gauss), il existe un entier k tel que $y - 4 = 16\,k$

en remplaçant dans $16\,(x - 1) = 3\,(y - 4)$ alors $16\,(x - 1) = 3 \times 16\,k$

donc $x - 1 = 3\,k$ soit $y = 16\,k + 4$ et $x = 3\,k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Vérification :</u> si $y = 16\,k + 4$ et $x = 3\,k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$16 \times (3\,k + 1) - 3 \times (16\,k + 4) = 16 - 12 = 4$

donc les solutions de l'équation (E) : $16\,x - 3\,y = 4$, sont les couples $(x\,;\,y)$ de la forme $(3\,k + 1\,;\,16\,k + 4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1. la transformation f du plan est définie par $z' = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\,z$ cette écriture est de la forme $z' = a\,z + b$ donc f est une similitude directe de rapport $\left|\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\right| = \sqrt{2}$ et d'angle $\arg\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\right) = \dfrac{3\pi}{8}$ à 2π près.

Le centre de f est l'unique point invariant par f or si $z = 0$ alors $z' = 0$ donc le centre est O.

2. *a.* La composée de similitudes directe est une similitude directe de rapport le produit des rapports donc $\sqrt{2}^{\,4} = 4$ et d'angle la somme des angles donc $\dfrac{3\pi}{8} \times 4 = \dfrac{3\pi}{2}$ à 2π près. O est le centre de toutes les similitudes donc O est le centre de G.

b. pour tout entier naturel n : $M_{n+4} = g(M_n)$ donc $OM_{n+4} = 4\,OM_n$ et que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c. $OM_4 = 4\,OM_0 = 4$ et $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_4}) = -\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près ;

$OM_5 = 4\,OM_1$ et $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_5}) = -\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près ;

$OM_6 = 4\,OM_2$ et $(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_6}) = -\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près ;

3. $z_{n+1} = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\,z_n$ donc la suite (z_n) est géométrique de raison $q = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}$, donc pour tout entier naturel n : $z_n = q^n\,z_0$ avec $z_0 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_n = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^n \times e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_n = \sqrt{2}^{\,n}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. *a.* $\dfrac{z_p}{z_n} = \dfrac{\sqrt{2}^{\,p}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3p\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2}^{\,n}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}} = \sqrt{2}^{\,p-n}\,e^{i\frac{3\pi}{8}(p-n)}$ **;** une mesure de $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p})$ est $\arg \dfrac{z_p}{z_n}$

donc $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p}) = \dfrac{3\pi}{8}(p - n) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

b. les points O, M_p et M_n sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p}) = k\,\pi$ où k est un entier relatif

donc $\dfrac{3\pi}{8}(p - n) + k \times 2\pi = k'\,\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs

donc $3\,(p - n) + 16\,k = 8\,k'$ où k et k' sont des entiers relatifs

donc $3\,(p - n)$ est un multiple de 8 ; or 8 est premier avec 3

donc 8 divise $p - n$ (théorème de Gauss) donc $n - p$ est un multiple de 8.

réciproquement si $n - p$ est un multiple de 8, alors il existe un entier k tel que $\frac{3}{8}(p - n) = k$ donc $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p}) = k\pi$ où k est un entier relatif donc les points O, M_p et M_n sont alignés.

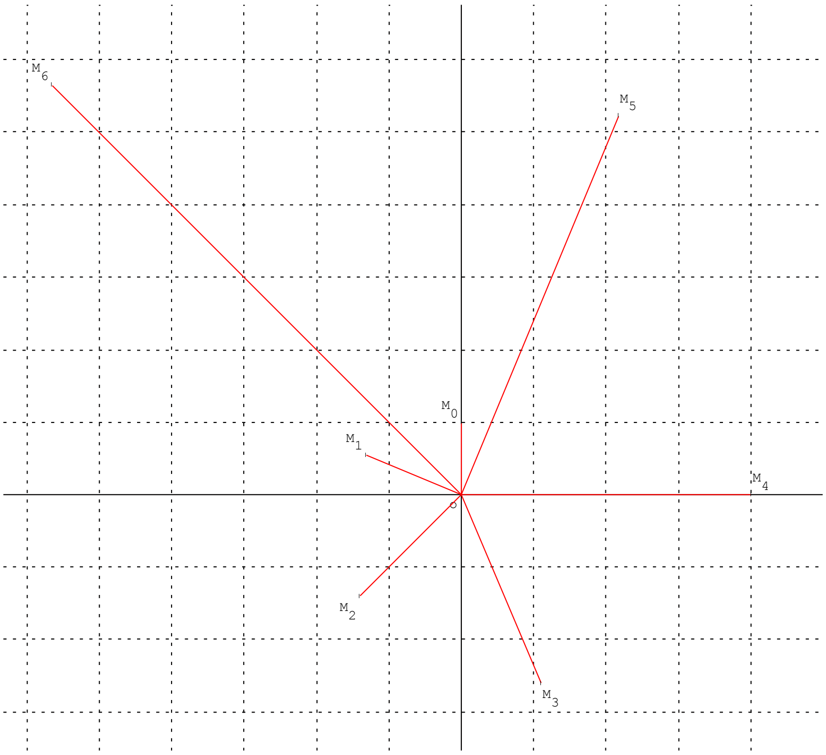
5. le point M_n appartienne à la demi-droite [Ox) si et seulement si $\arg z_n = 2k\pi$ ($k \in$ Z)

or $\arg z_n = \frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}$ à 2π près

$\arg z_n = 2k\pi$ ($k \in$ Z) $\Leftrightarrow 4 + 3n = 16k \Leftrightarrow 16k - 3n = 4$

les solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$, sont les couples $(x\ ;\ y)$ de la forme $(3k + 1\ ;\ 16k + 4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

le point M_n appartienne à la demi-droite [Ox) si et seulement si $n = 16p + 4$, $p \in$ Z.



EXERCICE 4 8 points

Partie A :

1. pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x+7} = \dfrac{4\,e^x \times e^{-x}}{(e^x+7)\times e^{-x}} = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$ puisque $e^x \times e^{-x} = 1$

2. *a.* $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 4$, la courbe C_1 admet pour asymptote la droite d'équation $y = 4$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$, la courbe C_1 admet pour asymptote la droite d'équation $y = 0$.

b. $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}} = 4 \times \dfrac{1}{1+7\,e^{-x}}$

La dérivée de la fonction $\dfrac{1}{u}$ est la fonction $-\dfrac{u'}{u^2}$ et la dérivée de la fonction e^u est la fonction $u'\,e^u$ donc la dérivée de la fonction $x \to e^{-x}$ est la fonction $x \to -e^{-x}$

donc $f'_1(x) = -\dfrac{-4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2} = \dfrac{4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2}$ or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, $1 < 1 + 7\,e^{-x}$ donc $1 > \dfrac{1}{1+7\,e^{-x}} > 0$

donc $4 > \dfrac{4}{1+7\,e^{-x}} > 0$, pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. *a.* $f_1(\ln 7 + x) = \dfrac{4\,e^{\ln 7 + x}}{e^{\ln 7 + x}+7} = \dfrac{4\,e^{\ln 7}\,e^x}{e^{\ln 7}\,e^x+7} = \dfrac{4\times 7\,e^x}{7\,e^x+7} = \dfrac{4\,e^x}{e^x+1}$.

$f_1(\ln 7 - x) = \dfrac{4}{1+7\,e^{-(\ln 7 - x)}} = \dfrac{4}{1+7\,e^{-\ln 7}\,e^x} = \dfrac{4}{1+e^x}$

$f_1(\ln 7 + x) + f_1(\ln 7 - x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x+1} + \dfrac{4}{1+e^x} = \dfrac{4\,(e^x+1)}{e^x+1} = 4 = 2 \times 2$, donc le point I_1 de coordonnées (ln7 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.

b. $f'_1(x) = \dfrac{4\,e^{-x}}{(1+7\,e^{-x})^2}$ donc $f'_1(\ln 7) = \dfrac{4\,e^{-\ln 7}}{(1+7\,e^{-\ln 7})^2}$

$f'_1(\ln 7) = \dfrac{4\,e^{-\ln 7}}{(1+1)^2} = e^{-\ln 7} = \dfrac{1}{7}$

Une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 est :

$$y = \frac{1}{7}(x - \ln 7) + 2 \text{ soit } y = \frac{1}{7}x + 2 - \frac{\ln 7}{7}$$

c. Pour tracer la droite (T_1) il faut deux points : l'un d'eux est I_1 le second le point d'ordonnée 2 donc d'abscisse ln 7

4. *a.* $f_1(x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x+7}$ de la forme $4\,\dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction définie par $u(x) = e^x + 7$

donc la fonction définie par $F_1(x) = 4\ln(e^x + 7)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

b. La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 ; ln7] est V définie par :

$V = \dfrac{1}{\ln 7 - 0}\displaystyle\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,dx = \dfrac{1}{\ln 7}\,[F_1(\ln 7) - F_1(0)]$

$V = \dfrac{1}{\ln 7}\,[4\ln(e^{\ln 7} + 7) - 4\ln(e^0 + 7)]$

$V = \dfrac{1}{\ln 7}\,\left(4\ln(7+7) - 4\ln(1+7)\right) \Leftrightarrow V = \dfrac{4}{\ln 7}\,[\ln 14 - \ln 8]$.

$V = \dfrac{4}{\ln 7} \ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. $f_n(x) = \dfrac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}$ donc $f_n(0) = \dfrac{4\,e^{0}}{e^{0}+7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ donc pour tout entier naturel n non nul le point A $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

2. *a.* $f_n(x) = 2 \Leftrightarrow 4\,e^{nx} = 2\,(e^{nx}+7) \Leftrightarrow 2\,e^{nx} = e^{nx} + 7 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}\ln 7$.

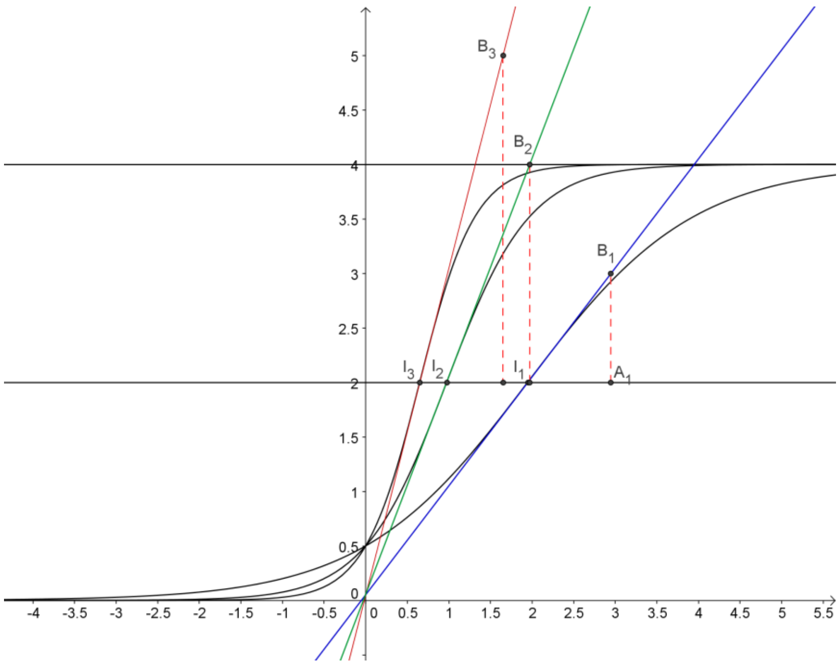
Pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection d'abscisse $\beta = \dfrac{1}{n}\ln 7$.

b. $f'_n(x) = \dfrac{4\,n\,e^{nx}\,(e^{nx}+7) - n\,e^{nx} \times 4\,e^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

$f'_n(x) = \dfrac{4\,n\,e^{nx}\,[(e^{nx}+7) - e^{nx}]}{(e^{nx}+7)^2} = \dfrac{28\,n\,e^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

$f'_n(\beta) = \dfrac{28\,n\,e^{n\beta}}{(e^{n\beta}+7)^2} = \dfrac{28\,n \times 7}{(7+7)^2} = n$. La tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n a pour coefficient directeur n.

d. Pour tracer T_1 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_1, on obtient I_1.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_1 ayant pour abscisse $x_I + 1$ puis le point B_1 de même abscisse que A_1 et d'ordonnée 2 + 1 = 3. (T_1) est la droite $(I_1 B_1)$
Pour tracer T_2 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_2, on obtient I_2.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_2 ayant pour abscisse $x_I + 2$ puis le point B_2 de même abscisse que A_2 et d'ordonnée 2 + 2 = 3. (T_2) est la droite $(I_2 B_2)$
Pour tracer T_3 : on cherche le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et de la courbe C_3, on obtient I_3.
On mesure au compas 1 unité de longueur, on place sur la droite d'équation $y = 2$, le point A_3 ayant pour abscisse $x_I + 3$ puis le point B_3 de même abscisse que A_3 et d'ordonnée 2 + 3 = 5. (T_3) est la droite $(I_3 B_3)$



3. $f_n(x) = \dfrac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}$ de la forme $\dfrac{4}{n} \times \dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction définie par $u(x) = e^{nx} + 7$ donc la fonction définie par $F_n(x) = \dfrac{4}{n}\ln(e^{nx} + 7)$ est une primitive de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

$u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\left[\dfrac{4}{n}\ln(e^{\ln 7}+7) - \dfrac{4}{n}\ln(e^{0}+7)\right] \Leftrightarrow u_n = \dfrac{n}{\ln 7} \times \dfrac{4}{n}\quad \ln(7+7) - \ln(1+7)$

$u_n = \dfrac{4}{\ln 7}\ln(14 - \ln 8) = \dfrac{4}{\ln 7}\ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$, la suite (u_n) est constante.