Applications du produit scalaire (II) : Calcul vectoriel, lignes de niveaux ...

▷ **Exercice 1.** Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $\mathrm{AB} = \sqrt{8}$. Soit I le milieu de [BC].

1. Déterminer et construire le point G tel que :

   $$2\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

2. Vérifier que les points A, G et I sont alignés et calculer :

   $$\mathrm{GA}^2, \qquad \mathrm{GB}^2, \qquad \mathrm{GC}^2.$$

3. Soit M un point du plan, exprimer $2\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2$ en fonction de MG^2.

▷ **Exercice 2.** On considère le triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = 6$, $\mathrm{AC} = 9$ et $\mathrm{BC} = 5$.

1. Déterminer une valeur approchée de $\widehat{\mathrm{BCA}}$ au degré près.
2. Déterminer une valeur approchée au dixième de la médiane de ABC issue de C.
3. Déterminer une valeur approchée au centième de l'aire du triangle ABC.
4. Placer le point M tel que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2$ soit minimal.

▷ **Exercice 3.** Soit ABC un triangle. I est le milieu de [BC] et K celui de [AI].

1. Montrer que le point K vérifie la relation :

   $$2\overrightarrow{\mathrm{KA}} + \overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{KC}} = \vec{0}.$$

2. Déterminer la valeur du nombre réel α tel que, pour tout point M :

   $$2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{MK}}.$$

3. En déduire l'ensemble des points M tels que :

   $$2\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} = \vec{0}.$$

▷ **Exercice 4.** Soient A et B deux points du plan tels que $\mathrm{AB} = 5$.

1. a) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 10$?
   b) En déduire la construction du point C tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 10$ et $\mathrm{AC} = 4$.
2. Soit D et E les points définis par :

   $$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

   Calculer : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
   En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{0}$.
   Que représente la droite (CD) pour le triangle BDE ?

▷ **Exercice 5.** Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On note I le milieu de [AB] et pour tout point M du plan :

$$f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}.$$

1. Calculer $f(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{B})$, $f(\mathrm{I})$ et $f(\mathrm{C})$.
2. Quel est l'ensemble E_0 des points M du plan tels que $f(\mathrm{M}) = 0$? Construire E_0.
3. Montrer que pour tout point M :

   $$f(\mathrm{M}) = \mathrm{MI}^2 - 1$$

4. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble E_k des points M du plan tels que $f(\mathrm{M}) = k$. Construire E_2.

▷ **Exercice 6. Vrai ou faux ?**
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = k$ ($k \in \mathbb{R}$) est un cercle de centre le milieu de [AB].

▷ **Exercice 7.** A et B sont deux points du plan tels que $\mathrm{AB} = 6\,cm$.
Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 40$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

▷ **Exercice 8.** A et B sont deux points du plan. Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation donnée :

- $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$
- $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$
- $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10$

▷ **Exercice 9.** Dans un repère orthonormé on considère les points $A(-1\,;\,1)$ et $B(0\,;\,2)$. On note I le milieu de [AB].
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 18$.

▷ **Exercice 10.** On considère A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.

1. Soit I le milieu de [AB] et M un point du plan.

a) Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB). Montrer que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \iff$ H est le milieu de [IB].

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 8$.

▷ **Exercice 11.** Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4\,cm$.
On définit pour un point M du plan :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}(M) = aire(AMB)\\
&f(M) = MA - MB\\
&g(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}\\
&h(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}\\
&i(M) = MA^2 + MB^2\\
&j(M) = MA^2 - MB^2
\end{aligned}$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$\mathscr{A}(M) = 4$
$f(M) = 0$

$g(M) = 0$
$h(M) = 0$

$i(M) = 2$
$j(M) = -24$