Antilles Guyane septembre 2017

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.

Pour une journée donnée, on note :

• E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;

• V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0,3\,p + 0,6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a. Calculer la valeur de p.

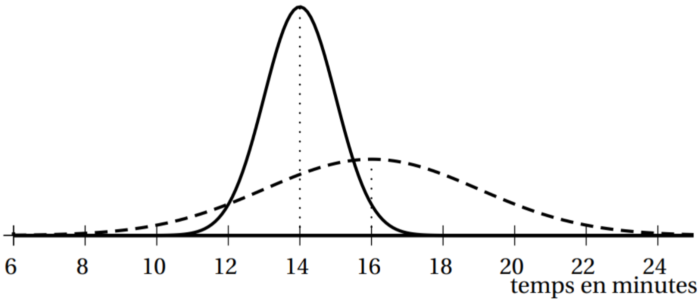
b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\dfrac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme C_C et C_V les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.



Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C.

2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4}.

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = \lambda\,e^{-\lambda t}$.

1. Soit b un réel positif. Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que $P(X \le b) = 1 - e^{\lambda b}$.

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.

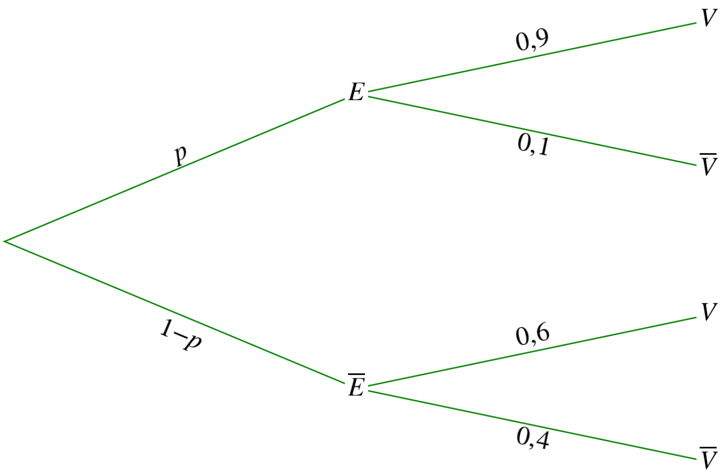
a. En déduire la valeur exacte de λ.

b. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

CORRECTION

Partie A

1.



2. $P(V) = P(V \cap E) + P(V \cap \overline{E}) = 0,9\,p + 0,6\,(1 - p) = 0,3\,p + 0,6$.

3. *a.* $P(V) = 0,675$ donc $0,3\,p + 0,6 = 0,675$ donc $0,3 = 0,075$ soit $p = 0,25$

b. $P_V(E) = \dfrac{P(V \cap E)}{P(V)} = \dfrac{0,25 \times 0,9}{0,675} = \dfrac{0,25 \times 0,9}{0,25 \times 0,9 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.

Partie B

1. $\mu_C > \mu_V$ donc la courbe en pointillés représente la fonction de densité de la variable aléatoire T_C et celle en trait continu représente la fonction de densité de la variable aléatoire T_V.

Les deux courbes sont symétriques respectivement par rapport aux droites d'équation $x = 16$ et $x = 14$ donc $\mu_V = 14$ et $\mu_C = 16$.

2. A la calculette : $P(10 \le T_V \le 15) = 0,8413$

3. $P(T_V \le 15) = 0,8413$ et $P(T_C \le 15) = 0,3694$ donc Romane doit privilégier le vélo si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail.

Partie C

1. $P(X \le b) = \int_0^b \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^b = 1 - e^{\lambda b}$.

2. *a.* $P(X \ge 50) = 0,9 \Leftrightarrow e^{-50\lambda} = 0,9 \Leftrightarrow -50\,\lambda = \ln 0,9 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0,9}{50} \Leftrightarrow \lambda \approx 0,0021$

b. Une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(X \ge 200)}(X \ge 250) = P(X \ge 50) = 0,9$