Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$.

Justifier que la fonction f est bien définie sur $]-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$.

1. *a*. Déterminer la forme canonique du trinôme du second degré x^2+6x-7.

1. *b*. Démontrer que la droite d'équation : $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

2. *a*. Conjecturer la dérivabilité de f en -7 et en 1 à l'aide de la calculatrice. Expliquer.

2. *b*. Démontrer le résultat conjecturé pour la dérivabilité en 1.

CORRECTION

Soit $D_f =]-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$.

1. La fonction racine carrée est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

x^2+6x-7 est un trinôme du second degré, $x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-7$

$x^2+6x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$ donc pour tout x de $]-\infty\,;-7\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$, $x^2+6x-7>0$ donc f est définie sur $]-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$

2. *a*. $x^2+6x-7=(x+3)^2-9-7=(x+3)^2-16$

2. *b*. Soit h un réel tel que $-3+h$ et $-3-h\in D_f$

$h\geq 4$ ou $h\leq -3$ alors $-3+h\geq 1$ ou $-3+h\leq -7$, donc $-3+h\in D_f$

$f(-3+h)=(-3+h-3)^2-16=h^2-16$

si $h\geq 4$ ou $h\leq -3$ alors $-3-h\leq 7$ ou $-3-h\geq 1$, donc $-3-h\in D_f$

$f(-3-h)=(-3-h-3)^2-16=h^2-16$ donc pour tout h réel, $f(-3+h)=f(-3-h)$

La droite d'équation : $x=-3$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

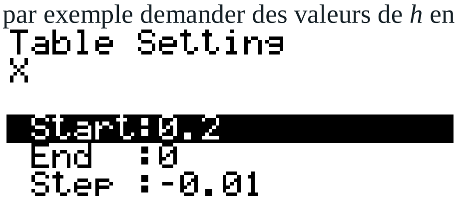
3. *a*. f est dérivable en 1 si et seulement si $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe, on a alors $f'(1)=\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

$f(1)=0$ et $f(1+h)=\sqrt{(1+h+3)^2-16}=\sqrt{(4+h)^2-16}=\sqrt{h^2+8h}$ donc $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+8h}}{h}$

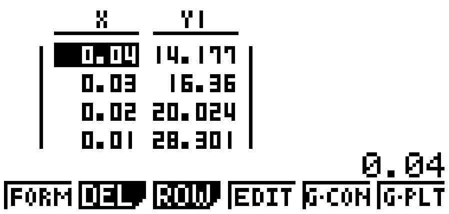
donc sur la calculatrice, dans le menu TABLE, on écrit $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+8h}}{h}$

Dans RANG, il faut choisir des valeurs de h de plus en plus proches de 0 :

par exemple demander des valeurs de h en partant de 0,2 et en allant vers 0 en diminuant à chaque fois de 0,01



en demandant la table, la calculatrice affiche :



On constate que plus h se rapproche de 0, plus la valeur de $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+8h}}{h}$ augmente et donc, on peut supposer que $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=+\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet une tangente verticale en 1.

La droite d'équation : $x=-3$ est un axe de symétrie de la courbe de f, le résultat est identique en -7 :

f n'est pas dérivable en -7 mais sa courbe admet une tangente verticale en -7.

3. *b*. Démontrer le résultat conjecturé pour la dérivabilité en 1.

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+8h}}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2\left(1+\dfrac{8}{h}\right)}}{h}=\sqrt{1+\dfrac{8}{h}}$ or $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}1+\frac{8}{h}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc

$\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\sqrt{1+\frac{8}{h}}=+\infty$ soit $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=+\infty$. f n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet une tangente verticale en 1.