EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$.

On désigne par **C** , sa courbe représentative.

1° Calculer $f'(x)$

2° Soit I le point de **C** , d'abscisse – 1 et J le point de **C** , d'abscisse 1.

a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à **C** .

b) Déterminer une équation de la tangente T en I à **C** .

c) Étudier la position de **C** , par rapport à T.

4° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$ et P sa courbe représentative dans le même repère que la courbe **C** .

Étudier la position relative des courbes **C** et P.

CORRECTION

1. $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right)$

2. *a*. $f'(1) = \frac{2}{3}$ et $f(1) = 1$ donc une équation de la tangente T' en J à C est $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc I a pour coordonnées $\left(-1 ; -\frac{1}{3}\right)$

Le point d'abscisse – 1 de la tangente T' a pour ordonnée : $y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}$ donc I appartient à T donc T' = (IJ)

3. *b*. $f'(-1) = -\frac{2}{3}$ et $f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc une équation de la tangente T en I à C est $y = -\frac{2}{3}x - 1$

3. *c*. $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3\right)$

$\Leftrightarrow f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}\left(x^3 + 3x^2 + + 3x + 1\right)$

$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}(x + 1)^3$ donc $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right)$ a le même signe que $\frac{1}{3x}(x + 1)^3$ donc que $\frac{x+1}{x}$

si $x < -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

Si $x = -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = 0$, I est point de contact de C et de T.

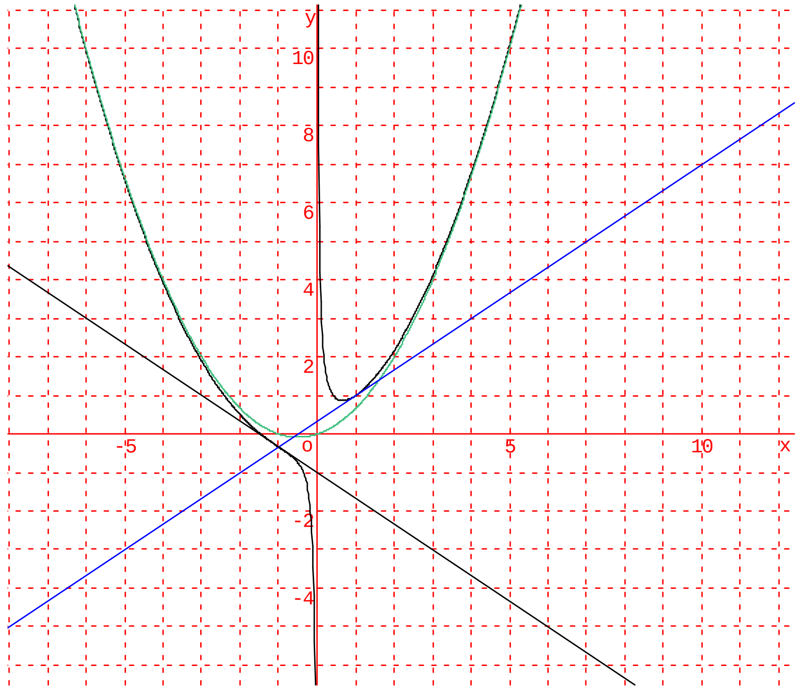
si $-1 < x < 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) < 0$ donc C est en dessous de T

si $x > 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

4. *a*. $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) - h(x) = 0$. La courbe P est asymptote à la courbe C en $+\infty$ et $-\infty$.

4. *b*. $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc si $x < 0$, $f(x) - h(x) < 0$ donc C est en dessous de T

si $x > 0$, $f(x) - h(x) > 0$ donc C est au dessus de T



y
10
8
6
4
2
-2
-4
-5
0
5
10
x