PSI * - Corrigé du TD 4 –

Problème -

Question 1 – a) Pour $n \geq 1$ $u_n \cdot (-1)^n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ de signe constant négatif, la suite ($|u_n|$) est décroissante (car la fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et de limite nulle. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées : ($\Sigma\, u_n$) converge. De plus, R_p est du signe de u_{p+1} et $|R_p| \leq |u_{p+1}| = \frac{1}{\sqrt{p+1}}$.

b) Dans le cas où p+1 est impair (par exemple) : $0 \leq R_p = S - S_p \leq u_{p+1}$ soit, en soustrayant $u_{p+1}/2$ à chaque terme de l'égalité : $|S - (S_p+u_{p+1})| \leq u_{p+1}/2$ et dans le cas général : $|S - (S_p+u_{p+1})| \leq |u_{p+1}/2|$ Pour connaître S à 10^{-4} près, il suffit que $\frac{1}{2\sqrt{p+1}} \leq 10^{-4}$ soit $4(p+1) \geq 10^8$ et $p > 10^8/4$: beaucoup trop de calculs à faire (les erreurs de calcul s'additionneront à l'erreur de méthode).

Question 2 - a) On sépare les termes d'indices n pair (n = 2k) et n impair (n = 2k-1) :

$$S_{2p} = \sum_{\substack{n=1\\ n=2k}}^{2p} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \sum_{\substack{n=1\\ n=2k-1}}^{2p} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{-1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$$

(n'oubliez pas dans le changement d'indices que k doit rester $\boxed{\text{entier).}}$ On regroupe alors les deux sommes : $S_{2p} = \sigma_p$.

b) Comme ($\Sigma\, u_n$) converge, (S_{2p}) admet une limite finie, qui est S, donc (ρ_p) converge également vers S :
($\Sigma\, d_n$) converge et la somme de cette série est S.
c) Par définition du reste de la série : $R_{2p} = S - S_{2p} = S - \sigma_p = \rho_p$

Question 3 - Etude de ($\Sigma\, w_n$) :

a) $$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{2n}}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1\right) \sim \frac{1}{4n\sqrt{2n}}$$ (en appliquant le développement limité de $t \to (1+t)^{-1/2} = 1 - t/2 + o(t)$ en 0 à l'ordre 1, pour $t = 1/n \to 0$)

De même pour d_n : $$d_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1/2} - 1\right] = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\frac{1}{4n} + \frac{o(1)}{2n}\right] \sim \frac{1}{4\sqrt{2}n^{3/2}} \sim v_n - v_{n-1}.$$

b) La série ($\Sigma\, d_n$) converge, la série $\Sigma(v_n - v_{n-1})$ converge également puisque la suite (v_n) admet une limite finie. Conclusion : (Σw_n) converge.

Pour $n \geq 2$ $$\sum_{n=p+1}^{q} w_n = \sum_{n=p+1}^{q} d_n - \sum_{n=p+1}^{q} (v_n - v_{n-1}) = \sum_{n=p+1}^{q} d_n - (v_q - v_p) \underset{q\to+\infty}{\to} \rho_p + v_p$$

Question 4 - Autour de la fonction F :

a) $w_n = f(n)$, avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2t}} - \frac{1}{2\sqrt{2t-2}} = \frac{1}{2\sqrt{2t}}a(t)$, avec $a(t) = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{2t}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}$; a est dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée $a'(t) = \frac{1}{2t^2}\left[\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-3/2} - \left(1-\frac{1}{2t}\right)^{-3/2}\right]$; comme $0 < 1 - \frac{1}{2t} < 1 - \frac{1}{t}$, $a'(t) < 0$; a est décroissante de limite 0 en $+\infty$, donc positive et f est positive.

Puis on calcule $f'(t) = -(2t-1)^{-3/2} + \frac{1}{2}(2t)^{3/2} + \frac{1}{2}(2t-2)^{3/2}$; en factorisant par $(2t)^{3/2}$, on montre de la même manière que f'(t) est négatif, et f décroissante sur $]1, +\infty[$.

b) En particulier, sur [n, n+1] : $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ (f est décroissante), ce qui entraîne : $w_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq w_n$ ou encore :

$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq w_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$: $F(t) = \sqrt{2t-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2t} - \frac{1}{2}\sqrt{2t-2}$; alors l'encadrement précédent devient : $F(n+1) - F(n) \leq w_n \leq F(n) - F(n-1)$

c) $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^2}{16} + o(t^2)$

d) $F(t) = \sqrt{2t}\left(\left(1-\frac{1}{2t}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{1/2}\right) = \sqrt{2t}\left(1 - \frac{1}{4t} - \frac{1}{32t^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2t} - \frac{1}{8t^2}\right) + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = \sqrt{2t}\left(\frac{1}{32t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{32t\sqrt{t}}$

Question 5 - a. Pour $n \geq 2$: $F(n) - F(n-1) \leq w_n \leq F(n+1) - F(n)$; en sommant ces inégalités pour n variant de p+1 à q, on obtient : $F(q) - F(p) \leq \sum_{n=p+1}^{q} w_n \leq F(q+1) - F(p+1)$; lorsque q tend vers l'infini : F(q), F(q+1) tendent vers 0 (cf 4d), $(\Sigma\, w_n)$ converge ; on obtient donc : $-F(p) \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n \leq -F(p+1)$

b. Δ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (F l'est) et $\Delta'(t) = f(t) - f(t+1) \leq 0$ (f est croissante) : Δ est décroissante. En utilisant le développement limité de $t \to (1+t)^{1/2}$ en 0 à l'ordre 3, on obtient $\Delta(t) \sim \frac{3\sqrt{2}}{64t^2\sqrt{t}}$

Question 6 - Pour p = 13 : $F(p) - F(p+1) \cong 1.1 \,.\, 10^{-4} > 10^{-4}$; pour p = 14 $F(p) - F(p+1) \cong 9.10^{-5} < 10^{-4}$; la valeur p = 14 convient, et on obtient : $S \cong 0.6049$ à 10^{-4} près. C'est nettement mieux pour le calcul !

Exercice 1 – $u_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 0$ $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$, avec $0 < a < b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;

Remarque : comme b > 0, la suite (u_n) est bien définie.

a) Méthode : comparaison série – intégrale. Soit f définie sur I = ℝ+* par f(x) = 1/x. La fonction f est définie, continue et strictement décroissante sur I. Conséquence : pour k > 0 $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$; en additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à n-1 : $\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n f(t)dt = [\ln(t)]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ soit :

$v_n - 1 + \ln(n) \leq \ln(n) \leq v_n - 1/n + \ln(n)$ ie $1/n \leq v_n \leq 1$. La suite (v_n) est bornée, mais ce calcul ne permet pas de conclure.

<u>On essaie donc une autre méthode : étudier les variations de la suite.</u>

$v_{n+1} - v_n = 1/(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n)$ Pour déterminer son signe, soit $g(x) = 1/(x+1) - \ln(x+1) + \ln(x)$ La fonction g est définie et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1/(x(x+1)^2) > 0$; g est croissante, de limite en $+\infty$ nulle car $g(x) = 1/(x+1) - \ln(1+1/x)$.
La fonction g est donc négative sur $[1, +\infty[$, et $v_{n+1} - v_n = g(n) \leq 0$ La suite (v_n) est décroissante ; étant minorée par 0, elle converge vers une limite que l'on notera γ.

<u>Autre méthode possible , et sûrement la plus rapide, à privilégier donc !</u> la suite (v_n) converge si et seulement si la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ converge ; un développement limité de $v_{n+1} - v_n$ à l'ordre 2 en 1/n donnerait le résultat.

$\ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(n+a) - \ln(n+b) = \ln(n) + \ln(1 + a/n) - \ln(n) - \ln(1 + b/n)$
$= a/n - a^2/(2n^2) - [\, b/n - b^2/(2n^2)] + o(1/n^2) = -(b-a)/n + (-a^2+b^2)/(2n^2) + o(1/n^2)$
car $\ln(1+x) =_0 x - x^2/2 + o(x^2)$

b) On additionne ces égalités pour k variant de 1 à n-1 :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_1) = -(b-a)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{-a^2+b^2}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n-1} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

La série de terme général $1/n^2$ converge car 2 > 1 (règle de Riemann) ; de même la série de terme général $o(1/n^2)$ converge car dominée par une série positive convergence $(1/n^2)$ et leur somme converge vers une limite notée c ; ce qui permet d'écrire :
$\ln(u_n/u_1) = -(b-a)(\, v_n - 1/n + \ln(n)) + c + o(1)$ De même, comme v_n converge vers γ, et en notant $d = -(b-a)\gamma + c$: $\ln(u_n/u_1) = d - (b-a)\ln(n) + o(1)$. ON compose alors par la fonction exponentielle :
$u_n = u_1\, e^d\, n^{-(b-a)}\, e^{o(1)}$ Comme $e^{o(1)}$ tend vers 1 : $\boxed{u_n \sim k / n^{b-a}}$, en notant $k = e_1\, e^d$.

Exercice 4 – X 2011 - Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. Déterminer la limite de $u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

On utilise le résultat classique : $H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et $u_n = H_{kn} - H_n = \ln(kn) + \gamma - \ln(n) + \gamma + o(1) = \ln(k) + o(1)$.

Conclusion : $\boxed{\lim u_n = \ln(k).}$ Attention, il faut pouvoir redémontrer le résultat utilisé !

Exercice 5 – TPE 2010 - Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

a) Méthode : utiliser la somme des termes d'une suite géométrique –

$\frac{1-\left(-t^{\mu}\right)^{n+1}}{1-\left(-t^{\mu}\right)} = \sum_{k=0}^{n}\left(-t^{\mu}\right)^k$ On intègre entre 0 et 1 : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^{\mu}} - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\mu(n+1)}dt}{1+t^{\mu}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\mu k+1}$ Or

$0 \le \int_0^1 \frac{t^{\mu(n+1)}dt}{1+t^{\mu}} \le \int_0^1 t^{\mu(n+1)}dt = \frac{1}{\mu(n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ On applique le théorème d'encadrement : $\int_0^1 \frac{t^{\mu(n+1)}dt}{1+t^{\mu}}$ tend vers 0 et

donc : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^{\mu}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mu k+1}$

b) Pour μ= 1 : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(t)\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Pour μ = 2 : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\operatorname{Arc}\tan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mu k+1}$

c) Tout d'abord : $1 + t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$; on multiplie la relation demandée par 1+t et on calcule la valeur en -1 : a = 1/3 ; puis la limite en $+\infty$: 0 = a + b : b = -1/3 et en t = 0 : 1 = a + c : c = 2/3.

Ainsi $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{2-t}{1-t+t^2}dt\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ Or

$$\int_0^1 \frac{2-t}{1-t+t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(1-t+t^2\right)'}{1-t+t^2}dt + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}dt = -\frac{1}{2}\left[\ln(1-t+t^2)\right]_0^1 + \frac{3}{2}\left[\frac{\operatorname{Arc}\tan\left(t\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]_0^1 .$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \pi\frac{\sqrt{3}}{9}}$

Exercice 13 – INT 2007 - Centrale 2001 - Etudier la série de terme général u_n avec $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$

Méthode : comparaison série – intégrale.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par f(x) = $\sqrt{x}$; f est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$; en particulier, pour $k \ge 0$:

$\sqrt{k} \le \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_k^{k+1} \le \sqrt{k+1}$ et en additionnant ces égalités pour k variant de 0 à n-1 :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} \le \int_0^n \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n \le \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k+1}$$

Si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$: $S_{n-1} \le 2n^{3/2}/3 \le S_n$ (on prend pour nouvel indice k+1 dans la 2° somme).

Comme $S_{n-1} = S_n - \sqrt{n}$: $2n^{3/2}/3 \le S_n \le 2n^{3/2}/3 + \sqrt{n}$, soit (théorème d'encadrement) : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^{3/2}} = \frac{2}{3}$ ie

$S_n \sim 2n^{3/2}/3$ et $u_n \sim 2n^{3/2-\alpha}/3$. On peut appliquer la règle des équivalents pour les séries à termes positifs (puisque $u_n > 0$) :

$\Sigma\, u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série de Riemann $\Sigma\, n^{3/2-\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha - 3/2 > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 5/2}$

Exercice 15 – Centrale, Mines, CCP et X 2014 - Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$.

On décompose la fraction en éléments simples : $\frac{1}{(8n+1)(8n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8n+1} - \frac{1}{8n+5}\right)$ ce qui donne, en calculant la somme partielle d'indice k : $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{8k+1} - \frac{1}{8k+5}\right) = \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{2n} \frac{(-1)^p}{4p+1}$ (on pose 8k +1 = 4(2k) + 1 et 8k + 5 = 2(2k+1) + 1)

Or $\sum \frac{(-1)^p}{4p+1}$ est une série alternée et vérifie les hypothèses du critère des séries alternées : la suite est alternée, telle que $\frac{1}{4p+1}$ est décroissante de limite 0. Conséquence : $\sum \frac{(-1)^p}{4p+1}$ converge ; la suite (S_k) converge et la série de départ converge.
Comment calculer à présent la somme de la série ?

En se rappelant (comme précédemment !) $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$: 4 S_k = $\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \int_0^1 t^{4p} dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p t^{4p} dt = \int_0^1 \frac{1-\left(-t^4\right)^{p+1}}{1-\left(-t^4\right)} dt$

Donc 4 S_k = $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} - (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{t^{4p+4}}{1+t^4} dt$ Or $0 \le \int_0^1 \frac{t^{4p+4}}{1+t^4} dt \le \int_0^1 \frac{t^{4p+4}}{1} dt = \frac{1}{4p+5} \underset{p \to +\infty}{\to} 0$ Conséquence : la suite (S_k) converge (on le savait !) et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$

Faut-il vraiment calculer cette intégrale ? courage ! (probablement inutile pour CCP)
On commence par décomposer la fraction en éléments simples en remarquant : $x^4 + 1$ est le début du développement d'un carré : $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$ (sinon, il faudrait décomposer le polynôme sur $\mathbb{C}[X]$ en cherchant les racines, puis regrouper les racines complexes conjuguées, OUILLE !!!). Le polynôme n'ayant pas de racines réelles, la factorisation est terminée.

On a ainsi : $\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}$ (la partie entière est nulle) ; or la fraction f est paire et f(-x) = $\frac{1}{x^4+1} = \frac{-ax+b}{x^2 + x\sqrt{2}+1} + \frac{-cx+d}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. La décomposition étant unique : a = -c et b = d. Il ne reste plus que deux termes à calculer. Une racine de $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ est $e^{i\pi/4}$; en multipliant l'égalité par $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ puis en calculant la valeur de la fraction obtenue en ce point, on obtient l'égalité :

a($\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$) + b = (1-i)/4 soit a = $-\sqrt{2}/4$ et b = ½ ; $\frac{1}{x^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2}+1}$

Reste à présent à en calculer une primitive : $\frac{1}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{-2x+2\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$ On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, ce qui donne :

$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{-(2x-\sqrt{2})+\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$ et sachant que $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}(\frac{x}{a}) + \text{cste}$, on obtient :

$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\ln\left|x^2 - x\sqrt{2}+1\right| + 2\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}-1) + \ln\left|x^2+x\sqrt{2}+1\right| + 2\operatorname{Arctan}(x\sqrt{2}+1)\right) + \text{cste}$ = t(x) Et on choisit la constante nulle. Ce qui permet de calculer, enfin ! $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\left(2-\sqrt{2}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Exercice 16 (Mines PSI 2016 - X PC 2014 – St-Cyr 2005) Montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^k \frac{\ln(k)}{k} = \ln(2)\left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}\right)$.

a) v_n = $\frac{\ln(n)}{n} \ge \frac{1}{n} > 0$ pour n tel que ln(n) ≥ 1, ie n ≥ 3. Comme $\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et diverge (série harmonique) Σ v_n diverge.
Pour déterminer un équivalent de u_n, on utilise la comparaison série-intégrale. On pose f(x) = $\frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction f est de classe C^1 sur [1, +∞[telle que : f '(x) = $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ ≤ 0 pour x ≥ e. f est une fonction continue par morceaux décroissante sur [e, +∞[, positive, de limite nulle en +∞. On peut donc utiliser la comparaison série –intégrale : pour n ≥ 3 = E(e) + 1 :

∀ x ∈ [n, n+1] f(n+1) ≤ f(x) ≤ f(n) On intègre ces inégalités sur le segment [n, n+1] : f(n+1) ≤ $\int_n^{n+1} f(t)dt$ ≤ f(n) puis on additionne ces inégalités pour n variant de 3 à p :

$S_{p+1} - S_3 \le \int_3^{p+1} f(t)dt \le S_p - S_2$ et en remplaçant p par p-1 (et donc $p \ge 4$) :

$S_p - S_3 \le \int_3^p f(t)dt$ soit finalement : $\int_3^{p+1} f(t)dt + S_2 \le S_p \le \int_3^p f(t)dt + S_3$

Or $\int_3^p f(t)dt = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_3^p = \frac{1}{2}\ln^2(p) - \frac{1}{2}\ln^2(3) \sim \frac{1}{2}\ln^2(p)$ On divise les deux inégalités précédentes par le terme $\frac{1}{2}\ln^2(p) > 0$ (ce qui conserve le sens de l'inégalité) Comme $\ln(p+1) \sim \ln(p)$, les deux termes qui encadrent ont pour limite 1 ; on peut conclure avec le théorème d'encadrement : $\lim_{p\to+\infty} \frac{u_p}{\frac{1}{2}\ln^2(p)} = 1$ soit $u_p \sim \frac{1}{2}\ln^2(p)$

b) Par contre, pour cette question, il faut détailler un peu plus ! méthode la plus courante : montrer que la suite ($u_n - \ln^2(n)/2$) converge revient à prouver que la série de terme général $a_n = (S_n - \ln^2(n)/2) - (S_{n-1} - \ln^2(n-1)/2)$) est convergente.

On calcule donc $a_n = u_n - u_{n-1} - [\ln^2(n) - \ln^2(n-1)/2] = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}[\ln(n) - \ln(n-1)][\ln(n) + \ln(n-1)]$ Pour effectuer un développement limité, on utilise : $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln(1 - 1/n)$. Ainsi

$a_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[2\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$

$= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{o(1)}{n^2}\right)\left[2\ln(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{o(1)}{n^2}\right]$ On développe, en remarquant que le reste $\frac{o(1)}{n^2}$ est multiplié par ln(n). Le reste sera donc $\ln(n)\,\frac{o(1)}{n^2}$, et tous les termes négligeables devant $\frac{\ln(n)}{n^2}$ « rentrent » dans ce reste !

$a_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\left(-2\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{o(1)\ln(n)}{n^2}\right)$ car $\frac{1}{n^2} = o(\frac{\ln(n)}{n^2})$ Il reste $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}\left(\frac{-1}{2} + o(1)\right) \sim -\frac{\ln(n)}{2n^2}$

Pour tout $n \ge 1$ $\frac{\ln(n)}{2n^2} \ge 0$, $- a_n \sim \frac{\ln(n)}{2n^2}$ et $\Sigma \frac{\ln(n)}{2n^2}$ converge (question a). Conséquence : (Σa_n) converge.

La suite ($u_n - \ln(n)^2/2$) converge et admet une limite c : $u_n - \ln^2(n)/2 = c + o(1)$, ce qui est bien le résultat demandé.

Et une 2° solution nettement plus facile : on reprend le théorème de comparaison série –intégrale pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)/x$, continue par morceaux, positive et décroissante sur $[3, +\infty[$: la série de terme général $v_n = \int_{n-1}^n f - f(n)$ converge ; or la somme partielle est $T_n = \sum_{k=2}^n v_k = \int_1^n f - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$; donc $v_n = - T_n$ converge.

c) La série de terme général $a_n = (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ est une série alternée, décroissante en valeur absolue à partir du rang 3 (cf question a) et de limite nulle, ce qui permet d'appliquer le critère des séries alternées : $\sum (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ est convergente. Reste à calculer sa somme ; pour cela, on calcule la somme partielle $U_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$; ou en fait :

$$U_{2n} + u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{\left[1 + (-1)^k\right]}_{\substack{=0 \\ \text{si } k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair} \\ k=2p}}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{p=1}^n 2\frac{\ln(2p)}{2p}$$

Ce qui donne : $U_{2n} + u_{2n} = \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(p)}{p} = \ln(2)\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + u_n$ et enfin, en utilisant $u_n - \frac{1}{2}\ln^2(n) = c + o(1)$:

$U_{2n} = -\frac{1}{2}\ln^2(2n) - c + \ln(2) [\ln(n) + \gamma] + \frac{1}{2}\ln^2(n) + c + o(1)$

Ainsi $U_{2n} = \frac{1}{2}[\ln(n) - \ln(2n)][\ln(n) + \ln(2n)] + \ln(2)[\ln(n) + \lambda] + o(1)$

$U_{2n} = -\frac{\ln(2)}{2}\left[2\ln(n)+\ln(2)\right]+\ln(2)\left[\ln(n)+\gamma\right]+o(1)$ La suite converge et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k}=\ln(2)\left(\gamma-\frac{\ln(2)}{2}\right)}$

Exercice 17 - (on retrouve l'exercice 1 !)

a) Pour $n > n_0$: $\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{v_{k+1}}{v_k} \geq \prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}$ ou encore $\frac{v_n}{v_{n_0}} \geq \frac{u_n}{u_{n_0}}$ et l'encadrement : $0 \leq u_n \leq c\, v_n$ (où $c = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$).
Conséquence : $u_n = O(v_n)$.

b) On effectue un développement limité à l'ordre 1 : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-a} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a} = 1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc pour $a \neq b$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{w_{n+1}}{w_n} \sim \frac{a-b}{n}$

Dans le cas $b > 1$: on pose $a = (b+1)/2 > 1$; alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{w_{n+1}}{w_n}$ est négatif à partir d'un certain rang, car $a - b < 0$. Donc il existe un rang n_0 tel que : $\forall\, n \geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}$ (on applique le résultat de la question a) : $u_n = O(w_n)$; or $\Sigma\, w_n$ converge (règle sur les séries de Riemann : $\Sigma\, 1/n^c$ converge $\Leftrightarrow c > 1$) Or ici $c = a > 1$; il ne reste plus qu'à appliquer la règle de domination : $\Sigma\, u_n$ converge

Dans le cas $b < 1$, on pose $a = (b+1)/2 < 1$; alors $a - b > 0$ et alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{w_{n+1}}{w_n}$ est positif à partir d'un certain rang Donc il existe un rang n_0 tel que : $\forall\, n \geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{w_{n+1}}{w_n}$ (on applique le résultat de la question a) : $w_n = O(u_n)$; or $\Sigma\, w_n$ diverge (règle sur les séries de Riemann) On applique la règle de domination (on a dominé par une série à termes positifs): $\Sigma\, u_n$ diverge

Exercice 23 – X – ENS PSI 2013 - Soient E l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Pour $t \in]0,1[$, on note $\varphi_t : F \to F$ définie par $\forall f \in F$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.
a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Trouver un supplémentaire de F dans E.
b) Montrer que φ_t est bien défini et que c'est un endomorphisme de F . Est-il injectif ?
c) Le but de cette question est de montrer que φ_t est un isomorphisme. Soit $g \in F$ et supposons qu'il existe $f \in F$ tel que $\varphi_t(f) = g$.
i) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(t^k x\right)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(t^n x)$. ii) Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right)$.
iii) Conclure. d) Trouver les $f \in F$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$.

a) E est bien sûr non vide (contient la fonction nulle) et si f et g sont lipschitziennes de rapports respectifs k et k', la fonction af + bg est lipschitzienne de rapport $|a|k + |b|k'$. F est le noyau de la forme linéaire (non nulle) : $f \in E \to f(0)$, donc un sous-espace vectoriel de E. Comme toute fonction de E s'écrit : $f = (f - f(0)) + f(0)$, avec $f - f(0) \in E$, je vous laisse finir de prouver qu'un supplémentaire de F dans E est $\mathbb{R}_0[X]$.

b) φ_t vérifie : $\varphi_{t\,(f)}(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $|\varphi_t(f)(x) - \varphi_t(f)(y)| = |f(x) - f(y) + f(ty) - f(tx)| \leq k|x-y| + kt|x-y|$: $\varphi_t(f)$ est lipschitzienne de rapport $k(1+t)$: φ_t est bien un endomorphisme de F.
Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi_t)$; alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(tx) = f(x)$ et par récurrence : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(t^n x) = f(x)$. Comme f est continue en 0 (puisque lipschitzienne), on obtient, lorsque n tend vers $+\infty$: $f(x) = f(0)$; f est constante, mais $f(0) = 0$: f est nulle. Conclusion : $\mathrm{Ker}(\varphi_t) = \{0\}$ et φ_t est injectif.

c) $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(t^k x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t^k x\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t^{k+1} x\right) = f(x) - f\left(t^n x\right)$; lorsque n tend vers l'infini, $t^n x$ tend vers $f(0) = 0$ (car f est continue en 0) ; conclusion : $\sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right) = f(0)$

Réciproquement : soit g une fonction de E, f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right)$.

- f est-elle correctement définie ? ie cette série est-elle convergente ?
  Comme g est lipschitzienne (de rapport k) $|g(t^k x)| \leq |x|\, t^k$: série géométrique convergente car la raison t appartient à $[0, 1[$; on applique la règle de majoration : $\sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right)$ converge et f est définie pour tout réel x.

- comme g(0) = 0, f(0) = 0
- enfin $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\left[g\left(t^k x\right) - g(0)\right]\right| \le |x| k \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = |x| \frac{k}{1-t}$: f est bien lipschitzienne.

On a ainsi montré que f admet un antécédent g par φ_t.

d) en fait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_t \circ \varphi_t(f)(x) = x$; on note $f_1 = \varphi_t(f)$; alors

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} id\left(t^k x\right) = \frac{x}{1-t}$ puis $f(x) = \varphi_t^{-1}(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x}{1-t} = \frac{x}{(1-t)^2}$ (vous pouvez vérifier que cette fonction correspond bien)

Exercice 24 – CCP PSI 2017 - Autour de $U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

a) La série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = a_k$ vérifie les hypothèses suivantes :

(1) alternée (2) $|v_k|$ est décroissante (3) de limite nulle. On peut alors appliquer le critère des séries alternées : Σa_k converge , donc la suite (U_n) est bien définie ; et même, U_n, reste d'une série convergente, tend vers 0. Mais de plus

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) En particulier, pour n > 0 : $|V_n| \le \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$; or $\Sigma \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si a > 1, ce qui est le cas ici avec a = 3/2 ; ainsi $\Sigma \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ; on applique la règle de majoration par une série positive et convergente: ΣV_n converge absolument, donc converge.

c) On note U la somme de la série ΣU_n ; alors $W_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(U - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^n}{n} U - V_n$; or $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ converge (de nouveau le critère des séries alternées) et ΣV_n converge (question b) ; ainsi ΣW_n converge (combinaison linéaire de séries convergentes). d) et puisque $|W_n| = |x_n|$ et ΣW_n converge, la suite (W_n) converge vers 0 et (x_n) converge vers 0.

Exercice 32 – Mines Telecom PSI 2018 - TPE PC 2013 – Mines PC 2016 - 2008 - Centrale 2003 – CCP 2005 - On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Donner la nature de Σu_n et en cas de convergence , donner la somme de la série.

Méthode : effectuer un développement limité (ou généralisé) de u_n.
Puisqu'il y a deux coefficients, on agit de sorte à avoir un développement limité comportant 3 termes, donc un développement limité à l'ordre 2 en 1/n :

$$u_n = \sqrt{n}\left(1 + a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + b\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right) = \sqrt{n}\left(1 + a + b + \frac{1}{n}\left(\frac{a}{2} + b\right) + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{a}{8} - \frac{b}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

- Si $1 + a + b \ne 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$: $\lim u_n = \pm\infty$; (Σu_n) diverge grossièrement.
- Si $1 + a + b = 0$ et $a/2 + b \ne 0$, alors $u_n \sim (a/2+b)/\sqrt{n}$; or $(\Sigma 1/\sqrt{n})$ est une série à termes positifs et divergente (car ½ < 1 ; règle de Riemann) ; on peut alors appliquer la règle des équivalents : (Σu_n) diverge.
- Si $1 + a + b = a/2 + b = 0$, alors a = -2, b = 1 et $u_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n^2}\frac{3}{8} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$: $u_n \sim \frac{3}{8n^{3/2}}$; or $(\Sigma n^{-3/2})$ est une série à termes positifs, convergente (car 3/2 > 1 ; règle de Riemann). On peut alors appliquer la règle des équivalents : (Σu_n) converge.

Conclusion : (Σu_n) converge $\Leftrightarrow$ a = -2 et b = 1

Dans ce cas, on calcule les sommes partielles , en prenant pour nouvel indice n+1 dans la 2° somme, n+2 dans la dernière :

$S_p = \sum_{n=1}^{p}\sqrt{n} - 2\sum_{n=2}^{p+1}\sqrt{n} + \sum_{n=3}^{p+2}\sqrt{n} = \left(1+\sqrt{2}\right) - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{p+1}\right) + \left(\sqrt{p+1} + \sqrt{p+2}\right)$ (il ne reste plus que les termes des indices < 3 ou > p)

soit $S_p = 1 - \sqrt{2} + \left(-\sqrt{p+1} + \sqrt{p+2}\right) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p+2}}$ (on a multiplié par l'expression conjuguée)

et $\lim_{p\to+\infty} S_p = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 - \sqrt{2}}$

Exercice 25 – ENS 2012 - CCP 2007 – Un grand classique ! à savoir faire

On pose $u_n = (-1)^n\int_0^1 x^n f(x)dx$. On peut déjà remarquer que (u_n) n'est pas à priori une suite alternée car on ne connaît pas le signe de f(x). Comment faire ? calculer les sommes partielles. $\sum_{k=0}^{n} u_n = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^n\right)dx$ On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ car x est compris entre 0 et 1.

$\sum_{k=0}^{n} u_n = \int_0^1 f(x)\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}x^{n+1}dx}_{=t_n}$ Vu l'énoncé, il suffit de montrer que la suite (t_n) tend vers 0. Or

f est continue sur le segment [0, 1] ; elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Soit M = sup { $|f(x)|$, $x \in [0, 1]$ } :

$|t_n| \leq \int_0^1 \frac{Mx^{n+1}}{1+x}dx \leq M\int_0^1 x^{n+1}dx \leq \frac{M}{n+2}$. On peut utiliser le théorème d'encadrement : lim $t_n = 0$

Conclusion : la série converge et sa somme est $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$

Exercice 250 – ENS 2012 - Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^1 f(x)x^n dx$. a) Mq la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. On pose : $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$. b) Montrer que $S = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$. c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(c_{0,n}, c_{1,n}, \ldots, c_{n-1,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $2^n - (1 - X)^n = (1 + X)(c_{0,n} + c_{1;n}X + \ldots + c_{n-1,n}X^{n-1})$. d) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}a_k$. Montrer : $|S - T_n| \leq S/2^n$.

a) On peut déjà remarquer que (a_n) est une suite alternée (f est à valeurs positives) ; donc (a_n) est décroissante, de limite nulle ; en effet : f est continue sur le segment [0, 1] ; elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Soit M = sup { $|f(x)|$, $x \in [0, 1]$ } :

$|a_n| \leq \int_0^1 Mx^n dx \leq \frac{M}{n+1}$. On peut utiliser le théorème d'encadrement : lim $a_n = 0$ On applique le critère spécial des séries alternées : la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b) Comment faire ? calculer les sommes partielles (on peut aussi utiliser cette méthode pour montrer la convergence).

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^n\right)dx$ On reconnaît là la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ car x est compris entre 0 et 1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \int_0^1 f(x)\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}x^{n+1}dx}_{=t_n}$ Vu l'énoncé, il suffit de montrer que la suite (t_n) tend vers 0 On utilise M = sup { $|f(x)|$, $x \in [0, 1]$ } : $|t_n| \leq \int_0^1 \frac{Mx^{n+1}}{1+x}dx \leq M\int_0^1 x^{n+1}dx \leq \frac{M}{n+2}$. On peut utiliser le théorème d'encadrement : lim $t_n = 0$ Conclusion : la série converge et sa somme est $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$

c) On utilise la formule $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ ce qui donne $2^n - (1-X)^n = (1+X)\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(1-X)^{n-1-k}$ et puisque

$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(1-X)^{n-1-k}$ est un polynôme de degré au plus n-1, on peut bien l'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(1-X)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}X^k$

A présent on se contente de calculer $T_n - S = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}\int_0^1 f(t)t^k dt - \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{2^n}f(t)\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}t^k dt - \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}t^k = \frac{2^n-(1-t)^n}{1+t}$; donc $T_n - S = \int_0^1 \frac{1}{2^n}f(t)\frac{2^n-(1-t)^n}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt = -\int_0^1 \frac{1}{2^n}f(t)\frac{(1-t)^n}{1+t}dt$ et :

$$|T_n - S| \leq \int_0^1 \frac{1}{2^n}f(t)\frac{1}{1+t}dt = \frac{S}{2^n}$$