ENONCE

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique : 3 cm
à tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4\,\mathrm{i})\,z + 5\,\overline{z}}{6}$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + 2$ i, $z_{\mathrm{B}} = 1$ et $z_{\mathrm{C}} = 3$ i.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
Placer les points A, B, C, A', B', C.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire?
4. Soit M un point quelconque du plan et M son image par f . Montrer que M' appartient à la droite (D).

5. *a*. Montrer que, pour tout nombre complexe z:: $\dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\,\dfrac{z-\overline{z}}{3}$

En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}}$ est réel.

5 *b*. En déduire que, si M' ≠ M, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
Effectuer la construction sur la figure.

CORRECTION

1. Si A est le point d'affixe 1 + 2 i son image A' est le point d'affixe $z_{\mathrm{A'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_{\mathrm{A}} + 5\,\overline{z_{\mathrm{A}}}}{6}$

donc $z_{\mathrm{A'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,(1+2\,\mathrm{i}) + 5\,(1-2\,\mathrm{i})}{6} = \dfrac{3+6\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}-8+5-10\,\mathrm{i}}{6} = 0$
donc A' = O origine du repère.

Si B est le point d'affixe 1 son image B' est le point d'affixe $z_{\mathrm{B'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_{\mathrm{B}} + 5\,\overline{z_{\mathrm{B}}}}{6}$

donc $z_{\mathrm{B'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})+5}{6} = \dfrac{4+2\,\mathrm{i}}{3}$, B' est le point d'affixe $\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}$.

Si C est le point d'affixe 3 i, son image C' est le point d'affixe $z_{\mathrm{C'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_{\mathrm{C}} + 5\,\overline{z_{\mathrm{C}}}}{6}$

donc $z_{\mathrm{C'}} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,3\,\mathrm{i} + 5\times(-3\,\mathrm{i})}{6} = \dfrac{9\,\mathrm{i}-12-15\,\mathrm{i}}{6} = -2-\mathrm{i}$, C' est le point d'affixe – 2 – i.
Attention lors du graphique au respect des unités données dans le texte. 1 unité graphique : 3 cm.
Graphique en fin de correction

2. $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels donc : $z' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z + 5\,\overline{z}}{6} = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,(x+\mathrm{i}\,y) + 5\,(x-\mathrm{i}\,y)}{6}$

$z' = \dfrac{3\,x + \mathrm{i}\,3\,y + 4\,\mathrm{i}\,x - 4\,y + 5\,x - \mathrm{i}\,5\,y}{6}$ soit $z' = \dfrac{8\,x-4\,y}{6} + \mathrm{i}\,\dfrac{4\,x-2\,y}{6}$

$z' = \dfrac{4\,x-2\,y}{3} + \mathrm{i}\,\dfrac{2\,x-y}{3} = x' + \mathrm{i}\,y'$

donc la partie réelle de z' est $x' = \dfrac{4\,x-2\,y}{3}$ et la partie imaginaire de z' est $y' = \dfrac{2\,x-y}{3}$.

3. M est invariant par f si et seulement si M' = M soit en terme d'affixe $z' = z$.

$z' = z \Leftrightarrow x' + \mathrm{i}\,y' = x + \mathrm{i}\,y \Leftrightarrow \dfrac{4\,x-2\,y}{3} = x$ et $\dfrac{2\,x-y}{3} = y$

$z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x - 2\,y = 3\,x \\ 2\,x - y = 3\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ 2\,x - 4\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2\,y = 0 \Leftrightarrow 2\,y = x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x$ donc M est invariant par f si et seulement si ses coordonnées vérifient $y = \dfrac{1}{2}x$ soit si et seulement si M appartient à la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
En traçant D, on remarque que A', B' et C' appartiennent à D.

4. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x ; y) donc M' est le point de coordonnées (x' ; y') avec $x' = \dfrac{4x-2y}{3}$ et $y' = \dfrac{2x-y}{3}$.

$y' - \dfrac{1}{2}x' = \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4x-2y}{3} = 0$ donc $y' - \dfrac{1}{2}x' = 0$ soit $y' = \dfrac{1}{2}x'$ donc M' appartient à D.

5. *a*. $z' - z = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z + 5\,\overline{z}}{6} - z = \dfrac{(-3+4\,\mathrm{i})\,z+5\,\overline{z}}{6}$

donc $\dfrac{z'-z}{z_A} = (z'-z)\times\dfrac{1}{z_A} = (z'-z)\times\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{(1+2\,\mathrm{i})(1-2\,\mathrm{i})}$

$\dfrac{z'-z}{z_A} = (z'-z)\times\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{5} = \dfrac{(-3+4\,\mathrm{i})\,z+5\,\overline{z}}{6}\times\dfrac{1-2\,\mathrm{i}}{5} = \dfrac{(-3+4\,\mathrm{i})\,z+5\,\overline{z}+(6\,\mathrm{i}+8)\,z-10\,\mathrm{i}\,\overline{z}}{30}$

$\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{(5+10\,\mathrm{i})\,z+(5-10\,\mathrm{i})\,\overline{z}}{30} = \dfrac{(1+2\,\mathrm{i})\,z+(1-2\,\mathrm{i})\,\overline{z}}{6} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + 2\,\mathrm{i}\,\dfrac{z-\overline{z}}{6}$

$\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\,\dfrac{z-\overline{z}}{3}$

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels alors $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$ et $z + \overline{z} = 2\,x$ donc $z + \overline{z}$ est réel

$z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,y$ donc $\mathrm{i}\,(z - \overline{z}) = -2\,y$ donc $\mathrm{i}\,(z - \overline{z})$ est réel donc $\dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\,\dfrac{z-\overline{z}}{3}$ est réel donc $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.

5. *b*. $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel donc il existe donc un réel k tel que $\dfrac{z'-z}{z_A} = k$ soit $z' - z = k\,z_A$

Or l'affixe de $\overrightarrow{OA}$ est z_A, et l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ donc $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires donc si M ≠ M' les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. Si N appartient à D, N est invariant donc N' = N

Si N n'appartient pas à D, N n'est pas invariant donc N ≠ N' donc (NN') et (OA) sont parallèles, de plus N' appartient à D donc N' est l'intersection de la parallèle en N à (OA) et de D.