Préliminaire : Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

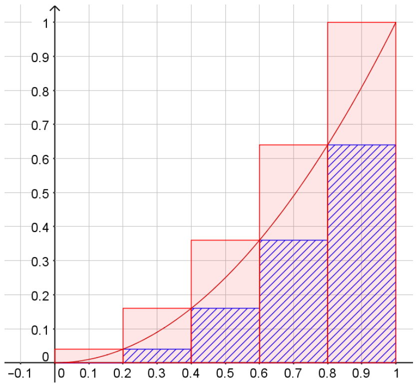
On suppose que l'on a divisé l'intervalle [0 ; 1] en n subdivisions, on veut encadrer l'aire sous la courbe par la sommes des aires des n rectangles "inférieurs" (suite (u_n)) et par la sommes des aires des n rectangles "supérieurs" (suite (v_n)).

On veut montrer que : $u_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$ et $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.

1. Soit k un entier compris entre 0 et n, exprimer l'air du rectangle "inférieur" puis celle du rectangle "supérieur" dont la base est l'intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$.

2. En déduire l'expression de u_n et de v_n avec un signe Σ.
3. Conclure en utilisant le préliminaire.

CORRECTION



Préliminaire : Initialisation : Si $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ or $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$ donc si $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

La propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons pour tout entier n que si, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

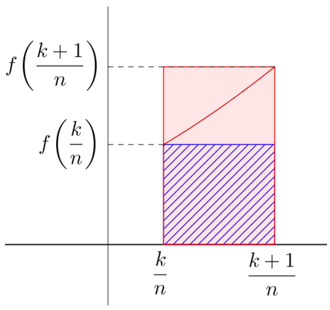
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}$$ or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. La propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n que si, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. v_n représente la somme des aires des rectangles hachurés en bleu, u_n représente la somme des aires des rectangles colorés en rose.



Le rectangle inférieur dont la base est l'intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$, a pour largeur $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$ donc a pour aire $\frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{n^3}$

Le rectangle supérieur dont la base est l'intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$, a pour largeur $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ et pour longueur $f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{(k+1)^2}{n^2}$ donc a pour aire $\frac{1}{n} \times \frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{(k+1)^2}{n^3}$

2. Le premier segment est $\left[\frac{0}{n};\frac{1}{n}\right]$, correspondant à $k = 0$

Le dernier segment est $\left[\frac{n-1}{n};1\right]$, correspondant à $k = n - 1$

$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

3. D'après le préliminaire $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

$u_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

Si $k = 0$, $k^2 = 0$ donc $v_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ d'après le résultat obtenu dans la démonstration de l'hérédité

donc $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.