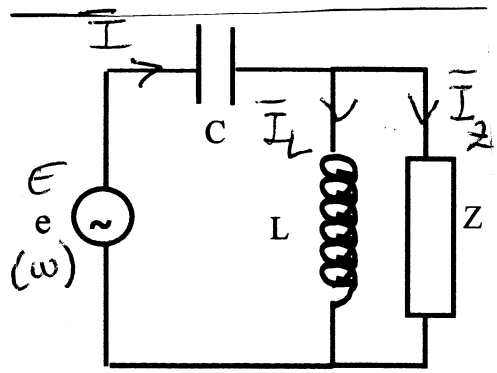
SMP S3 / Electromagnétisme — Collège Semestre 2

Jaouad. Dioui — Exercices 4, 5

Exercice 4.

Exercice 4.

Soit le circuit de la figure 4, obtenir la relation entre C, L et ω pour que l'intensité qui circule dans Z soit indépendante de Z.



On utilise la notation complexe :

$$\bar{E} = \bar{V}_C + \bar{V}_L \quad , \quad \bar{V}_L = \bar{V}_Z$$

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{I}}{jC\omega} \; ; \; \bar{V}_L = jL\omega \bar{I}_L \; ; \; \bar{V}_Z = Z.\bar{I}_Z$$

$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_Z$$

d'où $\bar{I}_Z = \bar{I} \dfrac{jL\omega}{Z + jL\omega}$ (1) ; avec $\bar{I} = \dfrac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq}}$ (2)

$\bar{Z}_{eq}$? $\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_C + (\bar{Z}_L // \bar{Z}) = \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{jL\omega . \bar{Z}}{jL\omega + \bar{Z}}$

$$= \frac{jL\omega + \bar{Z}(1 - LC\omega^2)}{jC\omega(\bar{Z} + jL\omega)}$$

Alors $\bar{I}_Z = \dfrac{jC\omega(\bar{Z} + jL\omega)}{jL\omega + \bar{Z}(1 - LC\omega^2)} \times \bar{E} \times \dfrac{jL\omega}{(\bar{Z} + jL\omega)}$ (éq. (1) et (2))

$\bar{I}_Z$ indépendant de $\bar{Z}$ si $1 - LC\omega^2 = 0 \rightarrow \underline{LC\omega^2 = 1}$

Il reste alors : $\bar{I}_Z = jC\omega\bar{E}$.

Exercice 5:

Pour le circuit de la figure, trouver une relation entre (R,X) et (R_1, X_1) pour que la puissance consommée par R+jX soit maximale.

Il existe deux puissances définies en courant alternatif : la puissance active (P) correspond à l'énergie effectivement consommée par unité de temps (Effet Joule) et la puissance réactive (Q) propre aux composants réactifs (L et C, donc impédances imaginaires pures).

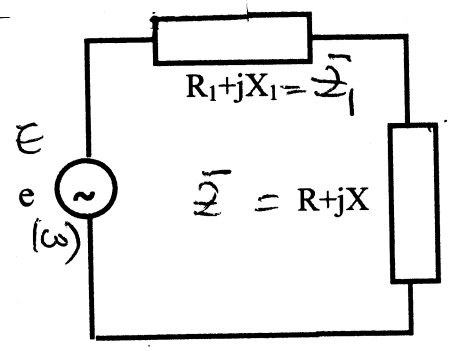


Figure 5

La puissance réactive ne correspond pas à une information effective ~~de~~ d'énergie. Elle permet de nous renseigner si le circuit tire profit ~~au~~ mieux de la puissance disponible.

$$\left| \begin{array}{l} P = R I_{eff}^2 \\ Q = X I_{eff}^2 \end{array} \right.$$

P_{act} dissipée dans Z :

$$P = R I_{eff}^2, \quad I = \frac{E}{(R_1+R)+j(X+X_1)} \Rightarrow (I_{eff})^2 = \frac{E^2}{(R_1+R)^2+(X+X_1)^2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{E^2 R}{\underbrace{\left[(R_1+R)^2+(X+X_1)^2\right]}_{D}}$$

P_{max} si $\frac{\partial P}{\partial R} = 0$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} < 0$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = E^2 \cdot \frac{D - R(2)(R+R_1)}{D^2} = 0 \Rightarrow D = 2R(R+R_1)$$

Ce qui donne : $R_1^2 - R^2 = (X+X_1)^2$

Une solution possible évidente est le choix $R = R_1$ et $X = -X_1$

Càd : $Z_1 = \overline{Z_1}$ (conjugué)

On peut vérifier que dans ce cas là, la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial R^2}\right)_{\substack{R=R_1 \\ X=-X_1}} < 0$

le calcul donne en effet $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial R^2}\right)_{\text{au max}} = -\frac{2R_1}{D^3} < 0$