Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On considère le point A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A.

On note enfin B image du point A, par la rotation r et z_B l'affixe du point B.

1. *a.* Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b. Vérifier que $z_B = 2\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.
Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$ et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A_1$.

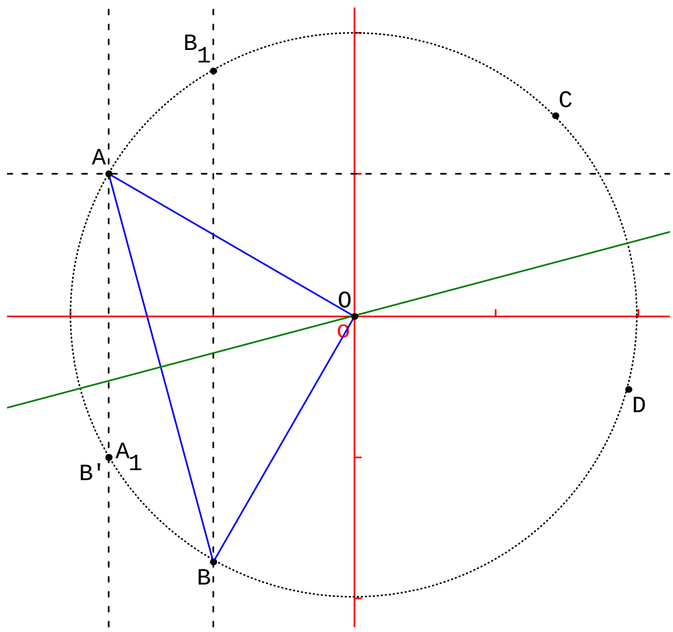
4. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}\,(1 + i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.

Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D.

CORRECTION

1. *a.* $z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$



b. La rotation r a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ donc $z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_B = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}$ donc $z_B = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$ donc $z_B = 2\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ soit $z_B = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\,i$

2. *a.* B est l'image du point A, par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ à 2π près, donc le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. $\overrightarrow{w}$ est un vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{12}$ donc a pour affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = \arg\left(\dfrac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)$ or $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ à 2π près,

$(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{2\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)$ or $\dfrac{2\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = 2\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)} = 2\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ donc $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ à 2π près,

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB})$ donc la droite Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O, donc la droite Δ qui est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est aussi la médiatrice de [AB] donc les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. B_1 a pour affixe $\overline{z_B}$, B' est l'image de B_1 par la rotation *r* donc a pour affixe $i\,\overline{z_B} = i(-1+\sqrt{3}\,i) = -i-\sqrt{3}$
$z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 a pour affixe $z_{A_1} = \overline{z_A} = -\sqrt{3} - i$ donc B' et A_1 ont la même affixe donc $B' = A_1$.

4. Le point C a pour affixe $2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OC}) = \arg\left(\dfrac{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)$ or $\dfrac{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)} = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{6}$ à 2π près,

Si D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ alors le triangle OCD est isocèle et Δ est la médiatrice de [CD]donc la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ donc $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{6}$ à 2π près, et OD = 2

donc $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{12}$ à 2π près, soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{\pi}{12}$ et OD = 2 donc D a pour affixe $2\,e^{i\frac{-\pi}{12}}$.