Liban juin 2007

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\,i\,z + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$i, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2\,x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1 ; 0 ; 5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3\,n + 4$ et de $4\,n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

CORRECTION

1. VRAI

Cette écriture est de la forme $z' = a\,z + b$ donc est celle d'une similitude directe.

Le centre, s'il existe, a une affixe solution de $z = 2\,i\,z + 1 \Leftrightarrow z\,(1 - 2\,i) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2\,i} \Leftrightarrow z = \frac{1+2\,i}{5}$. Le centre est bien A.

Le rapport de la similitude est $|\,2\,i\,| = 2$, l'angle de la similitude est arg a = arg $(2\,i) = \frac{\pi}{2}$

2. FAUX

Les points d'intersection de la surface et du plan ont des coordonnées qui vérifient : $\begin{cases} z = 5 \\ z = x^2 + 2\,x + y^2 + 1 \end{cases}$

soit $\begin{cases} z = 5 \\ 5 = x^2 + 2\,x + y^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 5$ et $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ qui est l'équation du cercle de centre $(-1 ; 0 ; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

3. VRAI

$750 = 6 \times 125$ or $5^2 \equiv 4\ (7)$ donc $5^4 \equiv 2\ (7)$ et $5^6 \equiv 8\ (7)$ ou encore $5^6 \equiv 1\ (7)$ (on pouvait obtenir plus rapidement le résultat en appliquant le petit théorème de Fermat)

$5^6 \equiv 1\ (7)$ donc $5^{6 \times 125} \equiv 1\ (7)$ donc $5^{750} - 1$ est un multiple de 7.

4. **VRAI** Soit d = PGCD$(3\,n + 4 ; 4\,n + 3)$

Si $n \equiv 1\ (7)$ alors il existe un entier q tel que $n = 7\,q + 1$ donc $3\,n + 4 = 21\,q + 7 = 7\,(3\,q + 1)$ et $4\,n + 3 = 28\,q + 7 = 7\,(4\,q + 1)$ donc 7 divise $3\,n + 4$ et $4\,n + 3$ donc 7 divise d

d'autre part : $4\,(3\,n + 4) - 3\,(4\,n + 3) = 7$ donc alors d divise 7 donc $d = 7$

On pouvait aussi montrer que : PGCD$(3\,n + 4 ; 4\,n + 3)$ = PGCD$(3\,n + 4, 4\,n + 3 - 3\,n - 4)$ = PGCD$(3\,n + 4, n - 1)$ = PGCD$(n - 1, 3\,n + 4 - 3(n - 1))$ = PGCD$(n - 1, 7)$.

Or $n - 1$ est multiple de 7, donc PGCD$(n - 1, 7) = 7$ donc PGCD$(3\,n + 4 ; 4\,n + 3) = 7$

5. FAUX.

Un contre exemple suffit : $a = 3$, $b = 2$. On a $a \times 2 - b \times 2 = 6 - 4 = 2$ et PGCD$(3, 2) = 1$.