Antilles Guyane septembre 2017

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note R l'ensemble des nombres réels.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(− 2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1\. *a*. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - z = 0$.

2\. On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées (x ; y ; z) sont données par $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - \dfrac{1}{2} \\ z = 4t + 2 \end{cases}$, $t \in$ R.

a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.

b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3\. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées (x ; y ; z) sont données par :

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases}, t \in \text{R}.$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).

Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

CORRECTION

1\. *a*. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 6 + 0 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 6 + 8 + 10 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc le plan (ABC) *a* une équation cartésienne de la forme : $6x + 8y - z + d = 0$.

B ∈ (ABC) donc $8 \times 1 - 8 + d = 0$ soit $d = 0$ donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $6x + 8y - z = 0$.

2\. *a*. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants.

3\. Soit M un point de (E), M appartient au plan (ABC) si et seulement si $6(t^3 + t) + 8(t + 1) - 2t = 0$.

soit $6t^3 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 6t + 4 = 0$

Soit $f(t) = 3t^3 + 6t + 4$ donc

$f'(t) = 9t^2 + 6$ donc $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur R.

f est définie continue strictement croissante sur R, $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ donc l'équation $f(t) = 0$ admet une seule solution α dans R, il existe un unique point M $(\alpha^3 + \alpha ; \alpha + 1 ; -2\alpha)$ qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).